

---

# Stabilitätsuntersuchungen in einem Modell für Formgedächtnislegierungen

Diplomarbeit bei Prof. Dr. A. Mielke am  
Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hannover

Hannes Uecker, November 1996

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modellierung und Vorbemerkungen</b>	<b>6</b>
2.1	Eigenschaften von Formgedächtnislegierungen . . . . .	6
2.1.1	Formgedächtniseffekt und Kristallgitter . . . . .	6
2.1.2	Hysterese im Last–Dehnungs–Diagramm . . . . .	8
2.2	Thermoelastische Modellierung . . . . .	9
2.2.1	Die klassischen Bilanzen . . . . .	9
2.2.2	Regularisierungen . . . . .	14
2.2.3	Konkrete Ansätze zur Wahl der freien Energie . . . . .	17
2.3	Ein Literaturüberblick . . . . .	20
2.3.1	Thermoelastischer Fall . . . . .	20
2.3.2	Isothermer viskoser Fall ohne Grenzflächenenergie . . . . .	21
2.4	Energie– und Entropiefunktionale . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Existenz und Eindeutigkeit</b>	<b>26</b>
3.1	Lokale Existenz und Eindeutigkeit für $(P_\gamma)$ . . . . .	27
3.2	Zur globalen Existenz, $(P_0)$ und $(P_\gamma)$ . . . . .	33
3.3	Isothermer viskoser Fall mit Grenzflächenenergie I . . . . .	36
3.4	Existenz und Eindeutigkeit ohne Viskosität . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Stabilität trivialer stationärer Lösungen</b>	<b>43</b>
4.1	Linearisierung um eine triviale stationäre Lösung . . . . .	44
4.2	Bemerkungen zum klassischen linearen Fall . . . . .	46
4.2.1	Linearisierte Thermoelastizität . . . . .	46
4.2.2	Energieabschätzungen höherer Ordnung, linear . . . . .	50
4.2.3	Linearisierte Thermoviskoelastizität . . . . .	54
4.3	Der nichtlineare nichtviskose Fall . . . . .	58
4.3.1	Energieabschätzungen höherer Ordnung, nichtlinear . . . . .	62
4.4	Der nichtlineare viskose Fall . . . . .	72
4.4.1	Stabilität trivialer stationärer Lösungen, isotherm . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Nichttriviale stationäre Lösungen</b>	<b>81</b>
5.1	Bifurkation aus den trivialen stationären Lösungen . . . . .	82
5.1.1	Das Bifurkationsproblem . . . . .	82
5.1.2	Bemerkungen zur globalen Bifurkation I . . . . .	85
5.1.3	Lokale Theorie und Berechnung der Bifurkation . . . . .	86
5.1.4	Stabilitätsuntersuchung der abzweigenden Lösungen, isotherm . . . . .	92
5.2	Integration des stationären Problems . . . . .	96

5.2.1	Die Mengen $\Xi(\theta)$ und $\Sigma(\theta)$ zulässiger Paare . . . . .	100
5.2.2	Die Time-Map und die Dehnungs-Map . . . . .	104
5.2.3	Bemerkungen zur globalen Bifurkation II . . . . .	111
5.3	Numerische Beispiele für $n$ -Übergangs-Lösungen . . . . .	113
5.4	Die Maxwell-Lösung für $\mu = 0$ . . . . .	117
5.5	Die Maxwell-Lösung für $\mu > 0$ . . . . .	121
5.6	Isothermer viskoser Fall mit Grenzflächenenergie II . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Maxima der Entropie bei gegebener innerer Energie</b>	<b>128</b>
6.1	Konvergenz für das Problem $(P_\gamma)$ . . . . .	128
6.2	Numerische Experimente zum Variationsproblems $(P_\eta)$ . . . . .	132
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>138</b>
A.1	Einbettungen, Ungleichungen und Verschiedenes . . . . .	138
A.2	Bifurkation aus einfachen Eigenwerten . . . . .	142

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir als eindimensionales Modell der thermoelastischen Eigenschaften bestimmter Metallegierungen, –der sogenannten Formgedächtnismetalle, das folgende System zweier nichtlinearer skalarer partieller Differentialgleichungen

$$u_{tt} = [\sigma(u_x, \theta) - \mu u_{xxx} + \gamma u_{tx}]_x \quad (1.1a)$$

$$c_v(u_x, \theta)\theta_t = \kappa\theta_{xx} + \theta\sigma_\theta(u_x, \theta)u_{tx} + \gamma u_{xt}^2 \quad (1.1b)$$

für Verschiebung  $u = u(t, x)$  und Temperatur  $\theta = \theta(t, x)$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $t > 0$ , zuzüglich Rand–und Anfangsbedingungen

$$u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad u(t, 1) = l(t), \quad (1.1c)$$

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0, \quad (1.1d)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x). \quad (1.1e)$$

Dabei sind die Spannung  $\sigma = \sigma(u_x, \theta)$  im Material und die spezifische Wärmekapazität  $c_v = c_v(u_x, \theta)$  gegebene Funktionen der Verzerrung  $\varepsilon := u_x$  und der Temperatur, die sich aus einer das Material beschreibenden Funktion  $\Psi = \Psi(\varepsilon, \theta)$  für die freie Energie ergeben. Die Randbedingungen (1.1c) und (1.1d) bedeuten, daß wir einen an den Rändern thermisch isolierten Draht aus Formgedächtnismetall betrachten, der am linken Ende festgehalten und am rechten Ende einer vorgegebenen Dehnung  $l(t)$  unterworfen wird, wobei an beiden Rändern der Verzerrungsgradient  $\varepsilon_x$  verschwinden muß.

Die speziellen Eigenschaften von Formgedächtnislegierungen wie Hysterese– und eben Formgedächtniseffekt beruhen auf Phasenübergängen und werden in Kapitel 2, Abschnitt 1 beschrieben. Im System (1.1a,b) werden sie dadurch modelliert, daß  $\Psi(\cdot, \theta)$  bei niedrigen bis mittleren Temperaturen  $\theta$  bis zu drei lokale Minima hat, die freie Energie als Funktion von  $\varepsilon$  also nicht konvex ist, sodaß die Spannung als Funktion der Verzerrung nichtmonoton ist. Der Term  $-\mu u_{xxxx}$  in (1.1a) stammt aus einer sogenannten Grenzflächenregularisierung, wobei  $\mu$  ein kleiner Parameter ist,  $0 < \mu \ll 1$ . Der Parameter  $\gamma \geq 0$  beschreibt die Stärke einer viskosen Dämpfung, und wir werden in dieser Arbeit zwischen den Fällen  $\gamma = 0$  und  $\gamma > 0$  unterscheiden.

Eine Herleitung der Anfangsrandwertaufgabe (1.1) aus den physikalischen Eigenschaften von Formgedächtnislegierungen und den klassischen Bilanzen der Kontinuumsmechanik ist Gegenstand von Abschnitt 2.2. Die Existenz von Lösungen zu (1.1) ist in verschiedenen Arbeiten untersucht, und es wurden die Lösungen numerisch studiert, siehe die Referenzen in Unterabschnitt 2.3.1. In Abschnitt 3.1 geben wir ferner für den Fall  $\gamma > 0$  einen eigenen (lokalen) Existenzbeweis.

Ziel dieser Arbeit ist nun die weitergehende Frage nach der Asymptotik von Lösungen zu (1.1), insbesondere im Fall  $\dot{l} \equiv 0$ . Hierzu scheinen bislang noch keinerlei Arbeiten vorzuliegen, wohingegen es verschiedene Untersuchungen des Langzeitverhaltens von Lösungen im Zusammenhang mit Phasenübergängen bei nichtkonvexer freier Energie für den isothermen Fall und  $\mu = 0$ ,  $\gamma > 0$  gibt. Mit letzterem ist gemeint, daß bei fester Temperatur  $\theta \equiv \text{const}$  die Energiebilanz (1.1b) ignoriert und nur die Impulsbilanz (1.1a) betrachtet wird. Hierzu fassen wir in Unterabschnitt 2.3.2 einige Ergebnisse

aus [Peg87],[BHJ<sup>+</sup>91] und [FM96] zusammen. Auf den isothermen Fall mit  $\gamma > 0$  und  $\mu > 0$  werden wir in dieser Arbeit ebenfalls eingehen. Die Idee dabei ist, daß wir für diesen Fall die Asymptotik relativ umfassend beschreiben können, und wir hieraus gewisse Hinweise für das vollständige System (1.1) erhalten. Dem liegt der Gedanke zu Grunde, daß die Temperatur nur eine einfache eigene Dynamik besitzt und im wesentlichen von der Verzerrung abhängt. Des weiteren halten wir die Ergebnisse für den isothermen Fall mit  $\mu > 0$  auch an sich für interessant.

Um nun die Asymptotik von Lösungen zu (1.1) zu studieren, bemerken wir zunächst, daß in Lösungen  $(u, \theta)$  des zu (1.1) gehörenden stationären vom Parameter  $l$  abhängigen Problem

$$\mu u_{xxxx} - \sigma(u_x, \theta)_x = 0, \quad (1.2a)$$

$$\kappa \theta_{xx} = 0, \quad (1.2b)$$

$$u(0) = u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0, \quad u(1) = l \quad (1.2c)$$

$$\theta_x(0) = \theta_x(1) = 0 \quad (1.2d)$$

die Temperatur  $\theta$  stets identisch einer Konstanten ist, was unmittelbar aus (1.2b) und (1.2d) folgt. Ferner erhalten wir für jede Dehnung  $l$  stets die ganze Familie trivialer Gleichgewichte

$$\{u(x) = x \cdot l, \theta \equiv \bar{\theta} : \bar{\theta} > 0\}.$$

Allgemein bezeichnen wir nun  $G_{\text{tr}} := \{u = xl, \theta \equiv \bar{\theta} : l \in \mathbb{R}, \bar{\theta} > 0\}$  als die Menge der trivialen stationären Lösungen, und in Kapitel 4 wird gezeigt, daß Lösungen zu (1.1) für  $\dot{l} \equiv 0$  unter ganz bestimmten Voraussetzungen an  $l$  und die Anfangsbedingungen exponentiell gegen eine triviale stationäre Lösung konvergieren, sowie eine Verallgemeinerung hiervon für  $\dot{l} \neq 0$ . Dabei kommen wir nicht mit linearisierter Stabilitätsanalyse aus, sondern verwenden die üblicherweise als „verallgemeinerte Energieabschätzungen“ bezeichnete Methode, wobei wir uns eng an [Sle81] anlehnen.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns dann mit der Menge der nichttrivialen stationären Lösungen. Dazu betrachten wir  $\theta$  zusätzlich zu  $l$  als Parameter, setzen

$$G_{\text{nt}}(\theta, l) := \{\text{Lösungen } u \neq xl \text{ von (1.2a,c) zu den gegebenen Parametern } \theta, l\},$$

und behandeln (1.2a,c) als Bifurkationsproblem mittels folgender zweier Ansätze:

Zunächst verwenden wir in Abschnitt 5.1 eine aus [FS90] entnommene Idee und schreiben (1.2a,c) in eine Randwertaufgabe zweiter Ordnung mit einem nichtlokalem Term um, wobei gleichzeitig das zweiparametrische Bifurkationsproblem (in  $l$  und  $\theta$ ) in ein einparametrisches überführt wird. Damit können wir in relativ einfacher Weise *lokal* Bifurkationen von nichttrivialen Lösungen aus  $G_{\text{tr}}$  studieren und Aussagen über die Stabilität der abzweigenden Lösungen treffen.

Der zweite Ansatz (Abschnitt 5.2) beruht auf einer in verschiedenen Arbeiten (z.B. [Sch84] und [CGS84]) verwendeten Transformation von (1.2a,c) auf ein Gleichungssystem für zwei Integralausdrücke, die wir als „Time-Map“ und als „Dehnungs-Map“ bezeichnen werden. Dies liefert eine intuitiv anschauliche und numerisch berechenbare Parametrisierung von  $G_{\text{nt}}(\theta, l)$  durch Tupel  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \in \mathbb{R}^2$ , und wir erhalten zunächst für  $\theta$  beliebig aber fest ein globales Bild der bei Nicht-Konvexität von

$\Psi(\cdot, \theta)$  sehr reichhaltigen Menge  $\cup_{l \in \mathbf{R}} G_{\text{nt}}(\theta, l)$  und von deren Struktur, sowie von der (Phasen-)Struktur der nichttrivialen Lösungen selbst. Dabei veranschaulichen und ergänzen wir die analytischen Ergebnisse durch numerische Berechnungen. Dieser zweite Ansatz liefert dann auch ein globales Bild von  $G_{\text{nt}} := \cup_{\theta > 0, l \in \mathbf{R}} G_{\text{nt}}(\theta, l)$ , und ist ferner grundlegend für den Rest der Arbeit, der sich mit zwei Variationsproblemen physikalisch gegebener Funktionale auf Lösungen beschäftigt:

Diese Funktionale führen wir bereits in Abschnitt 2.4 ein, also im Anschluß an die thermoelastische Modellierung, und für den isothermen Fall ( $\theta \equiv \bar{\theta}$  stellt nun auch hierbei einen Parameter dar) betrachten wir das Funktional

$$E^{(f)}(t) := E^{(f)}(u_x(t), u_t(t), \bar{\theta}) := \int_0^1 \frac{1}{2} u_t^2 + \Psi(u_x, \bar{\theta}) + \frac{\mu}{2} u_{xx}^2 dx$$

der freien Energie des Drahtes. Für  $\dot{l} \equiv 0$  ist  $\dot{E}^{(f)} \leq 0$  entlang von Lösungen von (1.1a), und in Abschnitt 3.3 zeigen wir mittels der Liapunov-Funktion  $E^{(f)}$  auf dem durch die Lösungen zu (1.1a) gebildeten dynamischen System, daß die Lösungen gegen  $G(l, \bar{\theta}) := G_{\text{nt}}(l, \bar{\theta}) \cup \{u = xl\}$  konvergieren. Mit dem Ansatz aus Abschnitt 5.2 können wir diese Menge charakterisieren, und in Abschnitt 5.5 notieren wir analytische Ergebnisse aus [CGS84] zum zugehörigen Variationsproblem der Minimierung der freien Energie bei gegebener fester Temperatur.

Für das volle Problem (1.1) und  $\dot{l} \equiv 0$  ist die innere Energie

$$E^{(i)}(t) := E^{(i)}(u_x(t), u_t(t), \theta(t)) := \int_0^1 \frac{1}{2} u_t^2 + \Psi(u_x, \theta) - \theta \Psi_\theta(u_x, \theta) + \frac{\mu}{2} u_{xx}^2 dx,$$

eine Erhaltungsgröße, und für die Entropie

$$\Upsilon(t) := \Upsilon(u_x(t), \theta(t)) := - \int_0^1 \Psi_\theta(u_x, \theta) dx$$

gilt  $\dot{\Upsilon} \geq 0$  entlang von Lösungen. In Abschnitt 6.1 zeigen wir dann, wie uns für  $\dot{l} \equiv 0$  die Liapunov-Funktion  $L := E^{(f)} - \Upsilon$  zumindest im Fall  $\gamma > 0$  die Konvergenz von Lösungen gegen die Menge der stationären Lösungen liefert.

Eine erste numerische Untersuchung des damit erhaltenen Variationsproblems der Maximierung der Entropie unter der Nebenbedingung einer gegebenen inneren Energie ist schließlich Gegenstand von Abschnitt 6.2, wobei wir wieder auf den Ansatz aus Abschnitt 5.2 zurückgreifen.

Um die Darstellung abzurunden sowie um geeignete Referenzen bereitzustellen, sind im Anhang einige Definitionen und Sätze im Zusammenhang mit Einbettungen und Ungleichungen in Sobolevräumen, mit partiellen Differentialgleichungen bzw. abstrakten Evolutionsgleichungen in Banachräumen, sowie zur Bifurkationstheorie zusammengestellt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die freundliche und hilfreiche Betreuung möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. Alexander Mielke bedanken. Mein Dank gilt ferner Florian Theil für die klärenden Gespräche zur Bedeutung von Phasenübergängen und zu weiteren grundlegenden Verständnisfragen.

## 2 Modellierung und Vorbemerkungen

### 2.1 Eigenschaften von Formgedächtnislegierungen

Abbildung 2.1 zeigt das dehnungsgesteuerte Experiment mit einer sogenannten Formgedächtnislegierung (engl.: shape memory alloy, kurz SMA), welches wir durch das System (1.1) mathematisch modellieren wollen. Bei einem solchen Experiment ist ein SMA-Draht an einem Ende fest eingespannt und wird am anderen einer vorgegeben Dehnung  $l(t)$  unterworfen. Dies wird im englischen als hard loading bezeichnet, im Unterschied zum soft loading, bei dem etwa am rechten Rand eine Last vorgegeben wird. Es gibt eine Vielzahl von Formgedächtnislegierungen, z.B. die als Nitinol

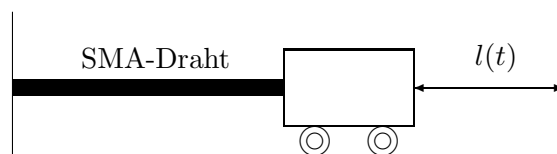


Abbildung 2.1: Das dehnungsgesteuerte Experiment

bekannt gewordenen Nickel-Titan Verbindungen, bestimmte Kupfer-Zink Legierungen (Messing), Kupfer-Aluminium-Zink- und auch bestimmte Eisenlegierungen, vgl z.B. [Fal83], und ihren Namen erhalten sie von dem sogenannten Formgedächtniseffekt. Damit ist gemeint, daß man einen Körper aus diesen Materialien bei niedrigen Temperaturen verformen kann, und der Körper bei Erwärmung wieder in die ursprüngliche Form zurückgeht. Dieses Verhalten macht Formgedächtnislegierungen für die praktische ingenieurmäßige Anwendung interessant.

#### 2.1.1 Formgedächtniseffekt und Kristallgitter

Der Grund für den Formgedächtniseffekt liegt darin, siehe z.B. [Sch80], daß je nach Temperatur verschiedene Konfigurationen des Metallgitters die Energie im Material minimieren. Bei hohen Temperaturen ist nur der unverzerrte Gitterzustand energetisch minimal, die hochsymmetrische sogenannte Austenit-Phase, fortan mit A bezeichnet. Bei tieferen Temperaturen wird die Austenit-Phase meta- bzw. instabil, und wir erhalten neue Energieminima, die zu bestimmten von der Temperatur abhängigen Verzerrungen des Gitters gehören, die niedersymmetrischen sogenannten Martensit-Phasen. Dabei bezeichnet man physikalisch eine zu einem globalen Minimum der Gitterenergie gehörenden Gleichgewichtskonfiguration des Gitters als stabil und eine zu einem lokalen aber nicht globalen Minimum gehörende Gleichgewichtskonfiguration als metastabil. Die Gleichgewichtskonfigurationen, die zu Maxima oder Sattelstellen gehören, heißen instabil. In der in Abschnitt 2.2 folgenden Modellierung entspricht die hier betrachtete Gitterenergie der freien Energie. Deshalb verweisen wir zur Anschauung der Gitterenergie für verschiedene Temperaturen auf Abb.2.4.

Im eindimensionalen Modell unterscheiden wir nur die beiden bei niedrigen Temperaturen zu den Verzerrungen  $\varepsilon_+(\theta)$  und  $\varepsilon_-(\theta)$  gehörenden Martensit-„Zwillinge“  $M_+(\theta)$  und  $M_-(\theta)$ . Im weiteren Sinne werden z.B. als zur  $M_+$ -Phase gehörig auch

Gitterkonfigurationen bezeichnet, die sich nur in der Nähe der zu  $\varepsilon_+$  gehörenden Gleichgewichtskonfiguration befinden. Wir können nun den Formgedächtniseffekt anschaulich wie folgt erklären, Abb.2.2, wobei man zugleich auch Abb.2.4 betrachten sollte.

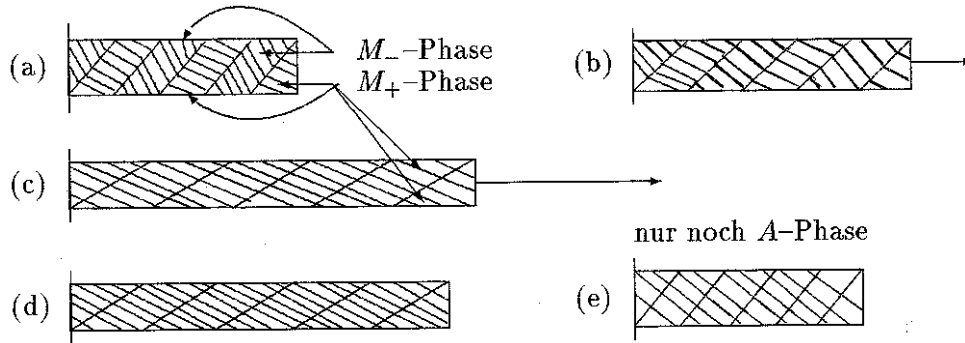


Abbildung 2.2: Der Formgedächtniseffekt in schematischer Gitterdarstellung

Bei der Abkühlung einer Probe, die keiner äußeren Last ausgesetzt ist, von einer hohen Temperatur, bei der nur Austenit stabil ist, auf eine Temperatur, bei der nur die Martensitphasen stabil sind, stellt sich eine zufällige Verteilung der Martensitphasen ein, die zu keiner makroskopischen Verschiebung führt (a). In jedem Punkt des Körpers ist das Gitter spannungsfrei und in einem Energieminimum. Diese Verteilung kann sehr fein sein, und in diesem Sinne wird von einer Mikrostruktur gesprochen. Ein Gebiet, daß zwei verschiedene Phasen von einander trennt heißt Grenzfläche. Nach [Bub95] sind in einer Probe von ca. 4cm Länge über 1500 solcher Grenzflächen gezählt worden. Etwas unklar bleibt an dieser Stelle wie auch in Abb.2.2, ob die Phasen direkt aneinanderstoßen, oder ob sie eher kontinuierlich ineinander übergehen. Dies wird eine Frage der mathematischen Modellierung sein und in Unterabschnitt 2.2.2 wieder aufgegriffen.

Wird nun eine kleine Last angelegt, so wird das Gitter aus den Energieminima herausgezungen, und es entsteht eine elastische Spannung (b). Wenn wir hier die Last wieder wegnehmen, so kehren wir in den Zustand (a) zurück. Sobald jedoch die Last so groß ist, daß eine bestimmte temperaturabhängige Grenzspannung überschritten wird<sup>1</sup>, so wandeln sich Bereiche, die ursprünglich in der  $M_-$ -Phase waren in die  $M_+$ -Phase um (c). Dabei kann man in das zugehörige Spannungs-Verzerrungs-Diagramm eine sogenannte Phasenübergangslinie einzeichnen. Solche Phasenübergangslinien verbinden Extrema der Spannung mit Zuständen gleicher Spannung bei unterschiedlicher Verzerrung, und weisen gewissermaßen darauf hin, welche Phasenübergänge stattfinden können. Allerdings sagen sie eher wenig über Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Phasen und über die tatsächliche Dynamik der Phasenübergänge aus. Nehmen wir nun die Last weg, so geht das Gitter überall in die zu  $\varepsilon_+$  gehörende Gleichgewichtskonfiguration, und wir erhalten die bleibende Verformung (d). Bei Erwärmen verschwindet diese Gleichgewichtskonfiguration und das Gitter geht in den unverzerrten Zustand (e). Dadurch nimmt die Probe makroskopisch wieder ihre alte Form an.

<sup>1</sup>in Abb.2.4 (a) als  $\sigma^*$  nebst der anschließend erwähnten Phasenübergangslinie eingezeichnet



Eine auf der Hand liegende Anwendung dieses Formgedächtniseffekts ist, daß bei Rückkehr in die alte Form z.B. eine Feuermeldung ausgelöst wird. Die dabei in dem Draht entstehenden Kräfte werden in [Sch80] als bis zu 200 mal höher angegeben als bei einer vergleichbaren Probe aus Bimetall. Des weiteren läßt sich die temperaturabhängige Form einer SMA-Probe wesentlich flexibler gestalten. Dabei kann man sogar wählen, ob eine Probe im Unterschied zu Bimetallen bei einer Abkühlung ihre makroskopische Form beibehalten (Abb.2.2 (e) nach (a)) soll, oder auch ohne Einwirkung einer äußeren Last z.B. die Rückkehr in den Zustand (d) erwünscht ist. Deshalb gibt es viele Anwendungen für Formgedächtnislegierungen, die mit Bimetallen nicht zu realisieren sind, siehe z.B. [Sch80].

### 2.1.2 Hysterese im Last-Dehnungs-Diagramm

Das temperaturabhängige sogenannte quasiplastische Verhalten von Formgedächtnislegierungen wird häufig durch vereinfachte Last-Dehnungsdiagramme wie in Abbildung 2.3 verdeutlicht. Tatsächlich gemessene Last-Dehnungs-Diagramme finden sich z.B. ebenfalls in [Sch80]. Der Formgedächtniseffekt und die zu Grunde liegenden Phasenübergänge sollen jetzt noch einmal in Beziehung zu den in Abb.2.3 auftretenden Hystereseschleifen betrachtet werden.

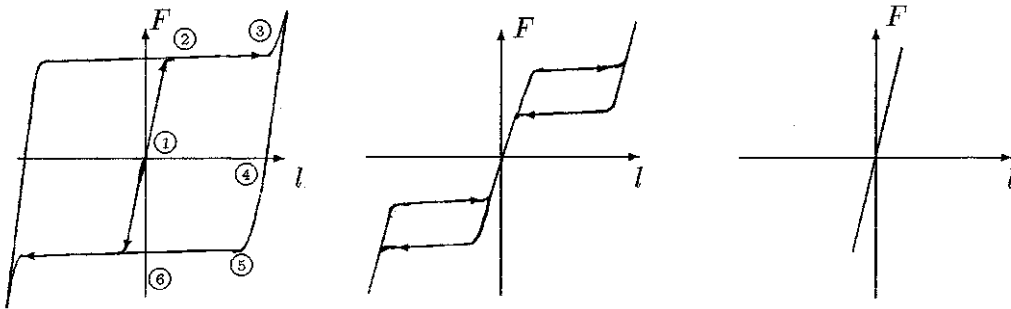


Abbildung 2.3: Temperaturabhängige Hysterese im Last-Dehnungs-Diagramm

In der Ausgangssituation Abb.2.2(a) befinden wir uns bei Anlegen der Last bei niedriger Temperatur im Ursprung in Abb.2.3(a). Legen wir eine kleine Last an, so bewegen wir uns auf der mit ① bezeichneten kurzen Geraden. Bei Wegnahme der Last kehren wir in den Ursprung zurück, elastisches Verhalten. Legen wir eine größere Last an, so beginnt bei ② in Bereichen, die bislang in  $M_-$ -Phase waren, die Umwandlung in die  $M_+$ -Phase. Die Dehnung erhöht sich stark, ohne das die Last weiter erhöht wird. Bei ③ ist die gesamte Probe in die  $M_+$ -Phase umgewandelt. Um die Probe weiter zu dehnen, muß die Last wesentlich erhöht werden, was mit der bei ③ nach oben weggehenden Kurve skizziert ist. Wenn wir nun die Last wegnehmen (Abb.2.2(c) nach (d)), so geht die Probe überall in die zu  $\varepsilon_+$  gehörende Gleichgewichtskonfiguration, und wir bewegen uns von ③ auf dem unteren Ast zum Schnittpunkt ④ mit der  $\sigma = 0$ -Achse und erhalten so den nur geringen Rückgang der Dehnung in Abb.2.2(c). Diese zurückbleibende Dehnung heißt Remanenz. Insgesamt wird dieses Verhalten der Probe bei niedrigen Temperaturen als ferroelastisch bezeichnet. Erwärmen wir

nun den Körper, so wandern wir auf der  $\sigma = 0$ -Achse zurück zum Ursprung, da mit wachsender Temperatur die Hysterese zusammenfällt. In Abb. 2.3(b) finden sich zwei getrennte Hystereseschleifen zu positiven bzw. negativen Dehnungen innerhalb eines bestimmten Bereiches. Insbesondere korrespondiert nur noch der ungedehnte (und unverzerrte) Zustand mit dem Verschwinden der angelegten Last. Diese Situation, bei der ein Körper nach Entlastung in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt, beim Be- und Entlasten jedoch eine Hysterisschleife auftritt, nennt man pseudoelastisches Verhalten. Bei höheren Temperaturen verschwindet die Hysterese völlig (Abb.2.3(c)).

**Bemerkung 2.1** Wenn wir in Abb.2.2(d) nicht Erwärmen, sondern damit beginnen, am rechten Rand eine negative Last anzulegen, also den Stab zusammendrücken, bewegen wir uns weiter auf dem unteren Ast. Bei ⑤ beginnt die Rückumwandlung in  $M_-$  Phasen. Die Last ⑥, die benötigt wird, um wieder  $l = 0$  Null zu erhalten, heißt Koerzitivkraft, und rührt daher, daß in der Probe noch die  $M_+$ -Phase überwiegt. Drücken wir die Probe weiter zusammen und nehmen dann die negative Last weg, so bleiben wir bei einer negativen Dehnung stehen. Bei Erwärmen kehren wir von dort zum Zustand  $(l, \sigma) = (0, 0)$  zurück. Die komplette Hystereseschleife in Abb.2.3(a) durchlaufen wir, wenn wir wiederholt dehnen und zusammendrücken, ohne die Temperatur von außen zu beeinflussen. Es stellt sich jedoch die Frage, wie sich die Temperatur auf Grund der dem System zugeführten mechanischen Energie verhält. Diese entspricht der durch die Hysteresiskurve eingeschlossenen Fläche. Ferner beachte man, daß es sich bei Abb.2.3 um Last-Dehnungs-Diagramme zu konkreten gedachten oder real ausgeführten Experimenten handelt, obwohl keine explizite Zeitskala mitgeführt ist. Es könnte vermutlich interessant sein, die Last-Dehnungs-Diagramme für verschieden schnelle Be- und Entlastungszyklen zu vergleichen. Solche konnten wir leider nicht finden. In jedem Fall hängt die Last-Dehnungs-Relation zu einem bestimmten Zeitpunkt entscheidend davon ab, auf welchem Wege wir eine jeweilige Dehnung erreicht haben. Insbesondere lassen sich z.B. in Abb.2.3(a) sogenannte innere Hystereseschleifen erzielen, wenn wir etwa bei ③ nur etwas Last wegnehmen und sie danach wieder anlegen. □

**Bemerkung 2.2** Das Abb.2.2 zugrunde liegende *Last-* und *Temperaturgesteuerte* und oben diskutierte Experiment (soft loading) ist eine Abwandlung des *dehnungsgesteuerten* Experiments aus Abb.2.1 (hard loading), daß wir in dieser Arbeit betrachten wollen. Die Last-Dehnungs-Diagramme aus Abb.2.3 erhalten wir im *dehnungsgesteuerten* Experiment, indem wir die Dehnung am rechten Rand vorgeben und die Last (= Spannung) dort messen. □

## 2.2 Thermoelastische Modellierung

### 2.2.1 Die klassischen Bilanzen

Im eindimensionalen ist unter Berücksichtigung der Massenbilanz die differentielle Form der Impulserhaltung gegeben durch

$$\rho u_{tt} = \sigma_x + f \quad (\text{IB})$$

und die differentielle Form der Energieerhaltung durch

$$\rho \partial_t \left( e + \frac{1}{2} u_t^2 \right) = \partial_x (\sigma u_t) + f u_t - \partial_x q_w + r, \quad (\text{EB})$$

wobei der zweite Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt sein muß, den wir in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung

$$\rho \partial_t \eta \geq -\partial_x \left( \frac{1}{\theta} q_w \right) + \frac{\rho}{\theta} r \quad (\text{CD})$$

schreiben. Dabei bezeichnet  $\rho$  die Dichte,  $e$  die spezifische innere Energie,  $u$  die Verschiebung,  $\sigma$  den Spannungstensor,  $f$  die äußeren Lasten,  $q_w$  den Wärmefluß,  $r$  die äußeren Wärmequellen,  $\eta$  die spezifische Entropie und  $\theta$  die absolute Temperatur.

In der Referenzkonfiguration sei der Draht unverzerrt, und habe die Länge 1 und die konstante Dichte  $\rho \equiv \rho_0$ . Wir nehmen oBdA  $\rho_0 = 1$  an und rechnen im weiteren einheitenfrei, siehe aber Bemerkung 2.5. Es soll der Spannungstensor  $\sigma$  nur von der Temperatur  $\theta$  und von der Verzerrung  $\varepsilon$  abhängen. Da die beobachteten Verzerrungen klein bleiben, setzen wir wie in der linearisierten Elastizitätstheorie  $\varepsilon = u_x$ . In dieser Arbeit werden wir insbesondere die Bezeichnungen  $\varepsilon$  und  $u_x$  gleichberechtigt verwenden, je nachdem welche der beiden die elegantere oder klarere Schreibweise ermöglicht. Für den Wärmefluß  $q_w$  nehmen wir schließlich das einfache lineare Fouriersche Gesetz

$$q_w = -\kappa \theta_x$$

an, wobei  $\kappa > 0$  den Wärmeleitkoeffizienten bezeichnet. Um nun die Entropiegleichung (CD) zu erfüllen, ist das typische Verfahren, für die Helmholtzsche freie Energie

$$\psi = e - \theta \eta$$

ein Gesetz einzuführen, aus dem man die konstitutiven Materialgesetze erhält. Dazu nehmen wir an, daß neben  $\sigma(t, x)$  auch  $e(t, x)$  und  $\eta(t, x)$  nur abhängen von  $\varepsilon(t, x)$  und  $\theta(t, x)$ , daß also die Materialgesetze lokal sind und insbesondere kein Gedächtnis haben. Ferner sei  $(\varepsilon, \theta) \mapsto (\sigma, \eta)$  stetig und  $(\varepsilon, \theta) \mapsto \psi$  Fréchet-differenzierbar. Dann existiert nach dem Satz von Coleman und Noll eine Funktion  $\Psi = \Psi(\varepsilon, \theta)$  mit

$$\psi(t, x) = \Psi(\varepsilon(t, x), \theta(t, x)), \quad \eta = -\partial_\theta \Psi, \quad \sigma = \partial_\varepsilon \Psi$$

und es gilt (CD) wegen  $q_w \theta_x = -\kappa \theta_x^2 \leq 0$ , was wir weiter unten für ein erweitertes System noch einmal explizit nachrechnen werden. Umgekehrt können wir eine freie Energie  $\Psi$  vorgeben, und erhalten mit  $\sigma = \partial_\varepsilon \Psi$ ,  $\eta = -\Psi_\theta$  und

$$\begin{aligned} \partial_t e &= \partial_t (\Psi - \theta \Psi_\theta) = \sigma u_{xt} + \Psi_\theta \theta_t - \theta_t \Psi_\theta - \theta \Psi_{\theta\theta} \theta_t - \theta \sigma_\theta u_{xt} \\ &= \sigma u_{xt} - \theta \Psi_{\theta\theta} \theta_t - \theta \sigma_\theta u_{xt} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} u_t^2 \right) = u_t u_{tt} \stackrel{(IB)}{=} \sigma_x u_t + f u_t \quad (2.2)$$

ein geschlossenes System für  $u$  und  $\theta$ :

$$u_{tt} = \sigma_x \quad (2.3a)$$

$$\underbrace{-\theta \Psi_{\theta\theta}}_{\textcircled{1}} \theta_t = k \theta_{xx} + \theta \sigma_\theta u_{xt}. \quad (2.3b)$$

Dabei benutzen wir im weiteren für den unterklammerten Term ① die Abkürzung

$$-\theta\Psi_{\theta\theta}(u_x, \theta) =: c_v(u_x, \theta).$$

Dieser Term stellt die hier also noch potentiell von der Verzerrung und der Temperatur abhängige spezifische Wärmekapazität des Materials dar. Ferner wurde in (2.3) berücksichtigt, daß wir in unserem Experiment keine äußeren Lasten oder Wärmequellen betrachten, d.h.  $f \equiv r \equiv 0$ , sondern das System durch die am rechten Rand vorgegebene Dehnung  $l(t)$  steuern wollen. Die Randbedingungen in  $u$  lauten also

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = l(t), \quad (2.3c)$$

und weiter nehmen wir an, daß der Draht an den Rändern wärmeisoliert ist, also

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0. \quad (2.3d)$$

Die Anfangsbedingungen seien schließlich

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x). \quad (2.3e)$$

In Anlehnung an Abschnitt 2.1.1 wollen wir nun die Phasenübergänge in Formgedächtnislegierungen und damit deren spezielle Eigenschaften dadurch modellieren, daß wir die verschiedenen Gleichgewichtskonfigurationen des Gitters in der freien Energie nachbilden. Abbildung 2.4 zeigt den qualitativen Verlauf von  $\Psi(\cdot, \theta)$  und  $\sigma(\cdot, \theta) = \partial_\varepsilon \Psi(\cdot, \theta)$  für verschiedene Temperaturbereiche. Zuvor wollen wir in Definition 2.1 noch einige Bezeichnungen festlegen, wobei wir den Begriff „stabil“ wie in Abschnitt 2.1 im physikalischen Sinne verwenden werden. Gleichzeitig implizieren wir bereits eine recht konkrete Form von  $\Psi$ , so daß die Definition sinnvoll ist. Unter Berücksichtigung der zu gegebener Temperatur symmetrischen Anordnung der Martensitphasen um den unverzerrten Zustand, nehmen wir insbesondere  $\Psi$  als symmetrisch in  $\varepsilon$  an. Da ferner der unverzerrte Zustand unabhängig von der Temperatur eine Gleichgewichtskonfiguration des Gitters ist, gilt stets  $\Psi_\varepsilon(0, \theta) = \sigma(0, \theta) = 0$ . Dies hat die etwas eigenartige Konsequenz, daß wir im unverzerrten Zustand keine thermisch induzierten Spannungen erhalten, was in verschiedenen Stellen in dieser Arbeit besonders berücksichtigten werden müssen.

**Definition 2.1** *Zu einer gegebenen freien Energie  $\Psi$  definieren wir*

- (i)  $\theta_M$  ist die Temperatur, unterhalb derer nur die beiden Martensitphasen  $M_-$  und  $M_+$  stabil sind. Diese ist dadurch gegeben, daß  $\Psi(\cdot, \theta)$  zwei absolute Minima bei  $\varepsilon_-(\theta) < 0$  und  $\varepsilon_+(\theta) = -\varepsilon_-(\theta)$  und daneben keine weiteren Minimalstellen aufweist. Für  $\theta > \theta_M$  entsteht ein lokales Minimum von  $\Psi(\cdot, \theta)$  bei  $\varepsilon = 0$ , d.h. im unverzerrten Zustand.
- (ii)  $\theta_E$  ist die Temperatur, bei der die zu  $\varepsilon_-, \varepsilon_+$  und  $\varepsilon = 0$  gehörenden Minima von  $\Psi$  den gleichen Wert haben. Für  $\theta > \theta_E$  ist  $\varepsilon = 0$  globale Minimalstelle von  $\Psi(\cdot, \theta)$ .
- (iii) Für  $\theta > \theta_A$  schließlich verschwinden die lokalen Minima  $\varepsilon_-$  und  $\varepsilon_+$ , und  $\varepsilon = 0$  wird einzige und damit globale Minimalstelle von  $\Psi(\cdot, \theta)$ .

Ferner wollen wir annehmen, daß  $\Psi(\cdot, \theta)$  für  $\theta < \theta_A$  und  $|\varepsilon| > \varepsilon_+(\theta)$  streng konvex ist in  $\varepsilon$ , und daß zwischen zwei Nullstellen von  $\sigma(\cdot, \theta)$  stets genau ein Extremum von  $\sigma$  liegt. In diesem Sinne definieren wir Funktionen  $l_1, l_2 : (0, \theta_K) \rightarrow [0, \infty)$  durch

(iv) für  $\theta < \theta_M$  gilt  $0 < l_2(\theta)$  und

$$\sigma_\varepsilon(\varepsilon, \theta) \begin{cases} < 0 \text{ für } \varepsilon \in (-l_2(\theta), l_2(\theta)) \\ = 0 \text{ für } \varepsilon \in \{\pm l_2(\theta)\} \\ > 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(v) für  $\theta_M < \theta < \theta_K$  gilt  $0 < l_1(\theta) < l_2(\theta)$  und

$$\sigma_\varepsilon(\varepsilon, \theta) \begin{cases} < 0 \text{ für } \varepsilon \in (-l_2(\theta), -l_1(\theta)) \cup (l_1(\theta), l_2(\theta)) \\ = 0 \text{ für } \varepsilon \in \{\pm l_1(\theta), \pm l_2(\theta)\} \\ > 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(vi) Es sei schließlich  $\theta_K > \theta_A$  die Temperatur, ab der  $\Psi$  global konvex ist in  $\varepsilon$ . Für  $\theta > \theta_K$  gilt also stets  $\sigma_\varepsilon > 0$ .

Wir nennen  $\Psi(\cdot, \theta)$  für  $\theta < \theta_M$  ein double-well-, und für  $\theta_M < \theta < \theta_A$  ein triple-well-Potential.

**Bemerkung 2.3** Obwohl das Modell gerade aus dem Grunde interessant ist, daß i.a. ein nicht-trivialer Zusammenhang zwischen der Verteilung der Verzerrung  $\varepsilon(t, x)$  im Draht und der Dehnung  $l(t)$  am rechten Rand besteht, haben wir mit Absicht die in der Verzerrungs-Temperatur-Ebene liegenden Kurven in (v), (vi) mit dem auch für die Dehnung verwendeten Buchstaben als  $l_1, l_2$  bezeichnet. In den Kapiteln 4 und 5 werden wir in Abhängigkeit von der Temperatur verschiedene Bereiche für die Dehnung  $l$  durch die Eigenschaften von  $\Psi(\varepsilon = l, \theta)$  charakterisieren. Die Kurven für  $\pm l_1$  und  $\pm l_2$  trennen gerade die gewissermaßen klassischen Bereiche mit  $\sigma_\varepsilon > 0$  von den nicht-klassischen mit  $\sigma_\varepsilon < 0$ . □

Das Problem ist nun, daß die Anfangsrandwertaufgabe (2.3a) bis (2.3e) nicht wohlgestellt ist, wenn  $\Psi(\cdot, \theta)$  nicht konvex in  $\varepsilon$  ist, denn gerade in den interessanten Fällen mit  $\sigma_\varepsilon < 0$  wird die Impulsbilanz (2.3a) elliptisch. Man kann auch bei beliebig glatten Anfangsbedingungen keine globalen klassischen oder auch schwachen Lösungen erwarten, sofern  $\dot{l}$  ungleich Null ist und/oder wir als Anfangsbedingung eine nicht-stationäre Lösung vorgeben, bei der  $u_0$  mehrere Phasen trifft, sondern wird in kurzer Zeit beliebig viele Sprünge in  $u_x$  erhalten. Dies modelliert zwar die mögliche Ausbildung von beliebig feinen Mikrostrukturen, in denen die verschiedenen Phasen direkt aneinanderstoßen<sup>2</sup>, aber zur mathematischen Behandlung werden wir die Impulsbilanz (2.3) regularisieren.

---

<sup>2</sup>und genau dieses Verhalten wollen wir auch als physikalisch nicht sinnvoll betrachten, siehe unten

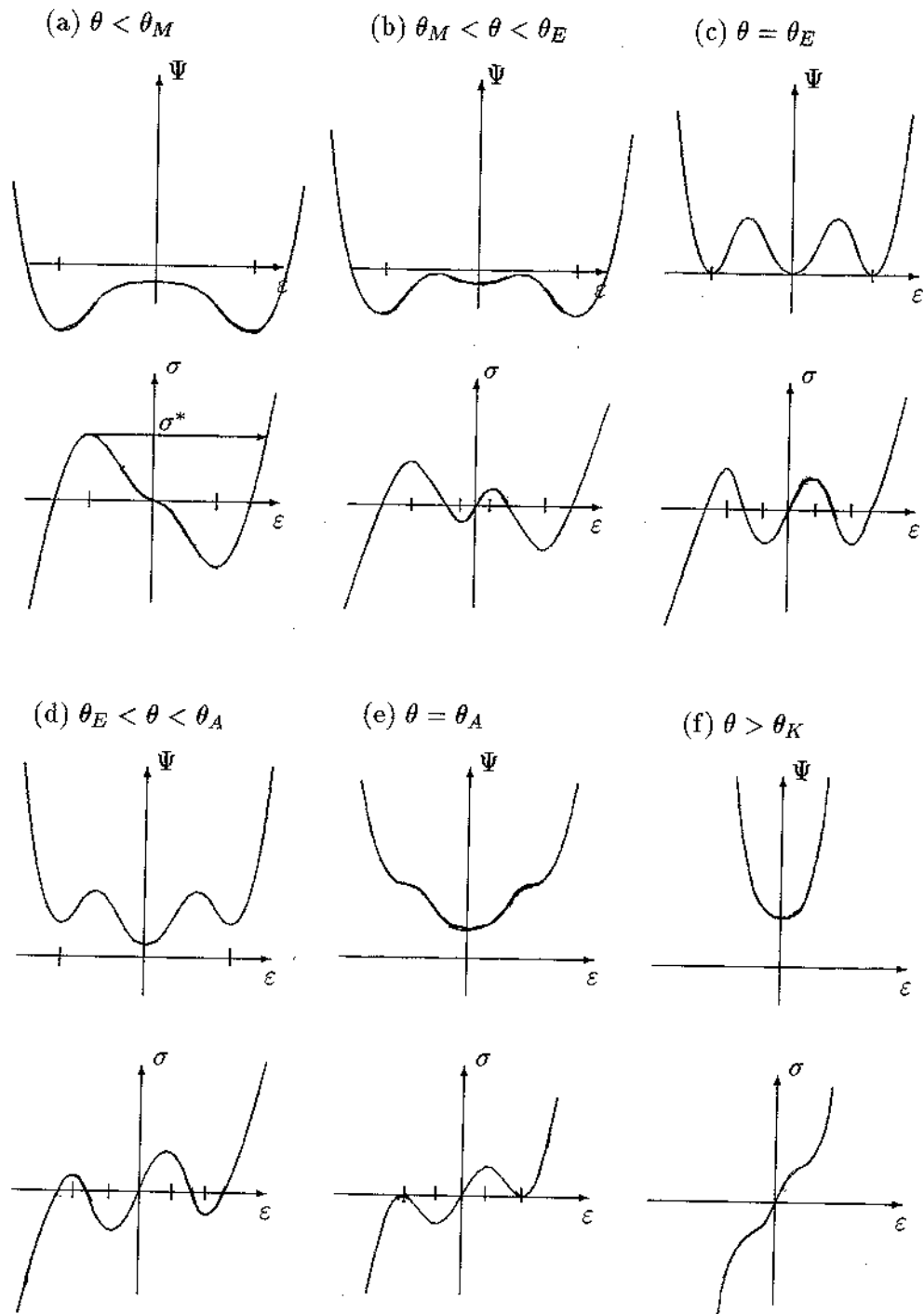


Abbildung 2.4: Freie Energie  $\Psi$  und Spannung  $\sigma$  als Funktionen von  $\varepsilon$  für verschiedene Temperaturen. Es sind in den  $\Psi$ -Skizzen jeweils  $\varepsilon_-(\theta)$  und  $\varepsilon_+(\theta)$  auf der  $\varepsilon$ -Achse markiert (a)-(d), und in den  $\sigma$ -Skizzen  $\mp l_2(\theta)$  bei (a) und  $\mp l_2(\theta)$ ,  $\mp l_1(\theta)$  bei (b)-(e). Der Wert von  $\Psi(0, \theta)$  ist dabei eher willkürlich, es soll jedoch ein gewisses Wachstum in  $\theta$  ausgedrückt werden. In (a) sind ferner die in Abschnitt 2.1.1 erwähnte Grenzspannung  $\sigma^*$  und die obere Phasenübergangslinie eingetragen. Entsprechende Linien lassen sich auch in (b) bis (e) einzeichnen.

### 2.2.2 Regularisierungen

Es gibt verschiedene Ansätze zur Regularisierung der Impulsbilanz (2.3a), die natürlich nach Möglichkeit physikalisch motiviert sein sollten. In [Fal83] wird eine sogenannte Grenzflächenenergie  $e_G$  betrachtet, die Veränderungen in der Gitterkrümmung berücksichtigt. Dies sei wiederum physikalisch sehr stark vereinfacht erläutert. Angenommen wir befinden uns in einem stationären Zustand mit z.B.  $u_x(x) = \varepsilon_-$  für  $x < x_0$  und  $u_x(x) = \varepsilon_+$  für  $x > x_0$ , sodaß in  $x_0$  ein Sprung in der Verzerrung vorliegt. In [Fal83] wird dies als Phasenübergangsgebiet (als Grenzfläche) verschwindender Dicke und verschwindender Energie bezeichnet, da der Sprung in der Verzerrung in der (inneren, in der freien genauso) Energie des Drahtes, im stationären Zustand definiert durch  $\int_0^1 e(u_x, \theta) dx$ , unberücksichtigt bleibt, da  $e = \Psi - \theta \Psi_\theta$  in  $x_0$  nur einen Sprung endlicher Höhe hat. Kristallographisch gesehen sollte der Sprung in  $\varepsilon$  jedoch die Energie erhöhen, was durch Abbildung 2.5 angedeutet werden soll.

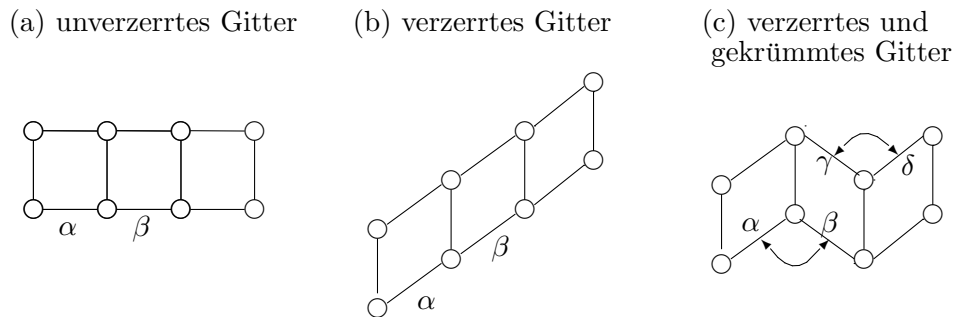


Abbildung 2.5: Wechselwirkung zwischen Kristallatomen in ungekrümmten und gekrümmten Gitter.

Abb.2.5.(a) stellt das unverzerrte Gitter dar. Die Striche zwischen den Kugeln sollen die Bindungen durch Elektronenwolken veranschaulichen. Insbesondere befinden sich die Elektronenwolken  $\alpha$  und  $\beta$  in einem gewissen Gleichgewicht, sie haben maximalen Abstand. Im gleichmäßig verzerrten Gitter (b) gilt dies immer noch. Die Verzerrung der einzelnen Zellen wird über die Abhängigkeit der freien Energie von  $\varepsilon$  berücksichtigt. In (c) schließlich stehen sich  $\alpha$  und  $\beta$  sowie  $\gamma$  und  $\delta$  gegenüber. Die Energie des Gitters ist erhöht, da sich die Elektronenwolken gegenseitig abstoßen. Dabei beachte man, daß im (diskreten) physikalischen Modell jede Veränderung der Verzerrung einen Sprung darstellt, und man in diesem Sinne vielleicht besser von einer Krümmungsenergie sprechen sollte. Der Name Grenzflächenenergie ist dadurch motiviert, daß der Effekt im Vergleich zur eigentlichen durch die Verzerrung der einzelnen Gitterzellen gegebenen Gitterenergie erst dann Bedeutung gewinnt, wenn sich zwei verschiedene in sich homogene Phasen gegenüberstehen, und sich deshalb sehr viele Elektronen wie  $\alpha$  und  $\beta$  in gleicher Weise von einander abstoßen

Als einfachste Möglichkeit für eine die Gitterkrümmung berücksichtigende Grenzflächenenergie entnehmen wir [Fal83] den Ginzburg–Ansatz  $e_G = e_G(u_{xx}) = \frac{\mu}{2} u_{xx}^2$ ,  $0 < \mu \ll 1$ , und der Natur dieses Terms entsprechend wird  $e_G$  in [Fal83] der freien Energie  $\Psi$  hinzuaddiert. Dies werden wir in den in dieser Arbeit verwendeten Schreibweisen jedoch nicht berücksichtigen, d.h. daß bei uns  $\Psi$  weiterhin die nur von  $\varepsilon$  und  $\theta$  abhängige freie Energie bezeichne, siehe auch Bemerkung 2.4. Aus physika-

lischen Gründen wird in [Fal83] ferner  $u_{xx} \stackrel{!}{=} 0$  an den Rändern gefordert, so daß der Draht dort beliebige (zulässige) Verzerrungen annehmen kann, die Krümmung jedoch verschwindet. Für uns ist dabei wichtig, daß diese Randbedingungen auch für die mathematische Behandlung besonders angenehm sind. Die aus  $e_G$  stammende sogenannte Momentenspannung im Innern des Gitters sei mit  $f_G$  bezeichnet und ergibt sich zu

$$f_G = \partial_{u_{xx}} e_G = \mu u_{xx}.$$

Als erweiterte Impuls und Energiebilanz erhalten wir dann

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \sigma_x - \partial_x^2 f_G = \sigma_x - \mu u_{xxxx} \\ \partial_t(e + e_G + \frac{1}{2}u_t^2) &= \partial_x(\sigma u_t) + \partial_x^2(f_G u_t), \end{aligned}$$

und mit den gleichen Umformungen der Energiebilanz wie in (2.1),(2.2) folgt

$$u_{tt} = \sigma_x - \mu u_{xxxx} \quad (2.4a)$$

$$c_v \theta_t = k \theta_{xx} + \theta \sigma_\theta u_{xt} \quad (2.4b)$$

Mathematisch stellt die Hinzunahme von  $-\mu u_{xxxx}$  eine Regularisierung dar, und das System (2.4a,b) wurde in einer Vielzahl von Arbeiten untersucht, siehe Unterabschnitt 2.3.1, wobei für  $\Psi$  stets der sogenannte Landau-Devonshire Ansatz zu Grunde gelegt wird. Dieser spezielle Ansatz für  $\Psi$  wird im nächsten Unterabschnitt vorgestellt und diskutiert.

Eine weitere mögliche Regularisierung von (2.3a) besteht darin, in das System (2.3a,b) eine viskose Dämpfung einzubauen. Im einfachsten Fall erhalten wir etwa

$$u_{tt} = \sigma_x + \gamma u_{txx} \quad (2.5a)$$

$$c_v \theta_t = k \theta_{xx} + \theta \sigma_\theta u_{xt} + \gamma u_{xt}^2 \quad (2.5b)$$

für ein  $\gamma > 0$ . Dieser Ansatz wurde z.B. in [CH94] ebenfalls für  $\Psi$  in Landau-Devonshire Form untersucht.

**Bemerkung 2.4** Aus kontinuumsmechanischer Sicht ist wie oben bereits bemerkt die Hinzunahme des Terms  $-\mu u_{xxxx}$  in die Impulsbilanz die Folge des Hinzufügens des entsprechenden Terms  $\frac{\mu}{2} u_{xx}^2$  zur freien Energie. Diese ist dann von der Form

$$\Psi = \Psi(u_x, u_{xx}, \theta) = \Psi_{\text{el}} + \frac{\mu}{2} u_{xx}^2,$$

wobei  $\Psi_{\text{el}}$  unsere bisherige freie Energie bezeichne. Auch im Falle viskoser Dämpfung fügt man die Terme  $\gamma u_{xt}$  in die Impulsbilanz und  $\gamma u_{tx}^2$  in die Energiebilanz nicht einfach ein, sondern leitet die entsprechenden Bilanzgleichungen aus der Beziehung  $\sigma = \Psi_\varepsilon + \gamma u_{xt}$  her. Da wir in dieser Arbeit  $\mu u_{xxxx}$  und  $\gamma u_{xt}$  jedoch eher als mathematische Regularisierungsterme betrachten wollen, und es außerdem bequem sein wird,  $\Psi$  und  $\sigma$  in der ursprünglichen Form  $\Psi = \Psi(u_x, \theta)$  und  $\sigma = \Psi_\varepsilon$  zu verwenden, werden wir diese etwas ungenaue Schreibweise beibehalten.  $\square$



Betrachten wir nun beide Regularisierungen gemeinsam, so erhalten wir das System (1.1), wobei wir stets  $\mu > 0$  voraussetzen, jedoch nur  $\gamma \geq 0$ . Den Fall  $\gamma = 0$  wollen wir soweit wie möglich mitbehandeln, da das System (2.4) einen gewissen Standard darstellt. An vielen Stellen werden wir jedoch die zusätzliche viskose Dämpfung benötigen, und wir werden die qualitativen Unterschiede zwischen den Fällen  $\gamma = 0$  und  $\gamma > 0$  verdeutlichen. Ferner ist es sinnvoll mit homogenen Randbedingungen zu arbeiten. Aus diesem Grund setzen wir

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - xl(t) \quad (2.6)$$

und erhalten nach Weglassen der Tilde die folgende Form der Anfangsrandwertaufgabe (1.1), die fortan im Falle  $\gamma = 0$  mit  $(P_0)$  und im viskosen Falle mit  $(P_\gamma)$  bezeichnet sei, sowie allgemein<sup>3</sup> mit  $(P)$ :

$$u_{tt} = [\sigma(u_x + l, \theta) - \mu u_{xxx} + \gamma u_{tx}]_x - x\ddot{l}, \quad (2.7a)$$

$$c_v(u_x + l, \theta)\theta_t = \kappa\theta_{xx} + \theta\sigma_\theta(u_x + l, \theta)(u_{xt} + \dot{l}) + \gamma(u_{xt} + \dot{l})^2, \quad (2.7b)$$

mit Randbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, 1) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad (2.7c)$$

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0, \quad (2.7d)$$

und Anfangsbedingungen (wobei  $u_0^{\text{neu}} = u_0^{\text{alt}} - xl(0)$  usw.)

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x). \quad (2.7e)$$

Aus (2.7a) bis (2.7d) erhalten wir dabei sofort die Kompatibilitätsbedingungen

$$u_{xxxx}(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad u_{xxxx}(1, t) = \ddot{l}(t)/\mu, \quad (2.8)$$

wenn diese hohen Ableitungen punktweise wohldefiniert sind. Insbesondere verschwindet also auch  $u_{xxxx}$  an beiden Rändern für  $\ddot{l} = 0$ .

Überprüfen wir schließlich für  $(P)$  noch einmal (CD), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t \eta &= \partial_t(-\Psi_\theta(u_x + l, \theta)) = -\sigma_\theta(u_{xt} + \dot{l}) + \frac{1}{\theta} \left( \kappa\theta_{xx} + \theta\sigma_\theta(u_{xt} + \dot{l}) + \gamma(u_{tx} + \dot{l})^2 \right) \\ &= \frac{1}{\theta} (\kappa\theta_{xx} + \gamma(u_{tx} + \dot{l})^2) \stackrel{!}{\geq} -\partial_x \left( \frac{-\kappa\theta_x}{\theta} \right) = \kappa \left( \frac{\theta_{xx}}{\theta} - \frac{\theta_x^2}{\theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Unabhängig von  $\gamma = 0$  oder  $\gamma > 0$  gilt also die Clausius–Duhem–Ungleichung in der differentiellen Form (CD), wobei jedoch die viskose Dämpfung in  $(P_\gamma)$  zusätzliche Entropie erzeugt. Für uns von besonderer Bedeutung wird die integrierte Form von (2.9) sein, die wir in Abschnitt 2.4 notieren.

Es wird nun noch festzulegen sein, in welchen Räumen die Anfangsbedingungen sowie  $l$  liegen sollen. Ferner muß eine konkrete freie Energie  $\Psi$  gewählt werden (wenn man z.B. Lösungen numerisch bestimmen will), oder zur mathematischen Behandlung geeignete Bedingungen an  $\Psi$  (Glattheit, Wachstumsbedingungen) formuliert werden. Dies geschieht im nächsten Unterabschnitt.

<sup>3</sup>d.h. wenn  $\gamma = 0$  oder  $\gamma > 0$  keine Rolle spielt

**Bemerkung 2.5** Wir werden in dieser Arbeit wie auch in der Herleitung unseres Problems (P) einheitenfrei rechnen, bemerken aber folgendes. Nehmen wir  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$  als Einheit der Dichte und  $\text{m}$  als Einheit der Verschiebung, so erhalten wir  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$  als Einheit eines Terms in der Impulsbilanz (IB),  $\text{N}=\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  als Einheit von  $\sigma$  und  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$  als Einheit von  $\Psi$  und von  $e$ . Es ist also unser  $\Psi$  wie auch  $e$  eine Energiedosis, was jeweils durch das Attribut spezifisch ausgedrückt wird. Die eigentliche freie Energie(dichte) ergibt sich durch Multiplikation mit  $\rho$ , sodaß eigentlich z.B.  $\sigma = \rho\Psi_\varepsilon$  gilt. Dies fällt unter den Tisch, wenn wir  $\rho$  ignorieren, und wir erhalten  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  als Einheit eines Terms in der Impulsbilanz und  $\text{N}\cdot\text{s}^{-1}$  als Einheit eines Terms in der Energiebilanz. Dementsprechend ergeben sich die Einheiten von  $\mu$  zu  $\text{m}^4\text{s}^{-2}$  und von  $\gamma$  zu  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .

Schließlich bemerken wir noch, daß wir in (2.6) einheitentechnisch die Substitution  $\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - xl(t) \cdot \text{m}^{-1}$  machen, um dann die Größe  $l$  in (2.7a,b) als dimensionslos zu betrachten, sodaß eben z.B.  $u_{tx}$  und  $\dot{l}$  die gleiche Dimension  $\text{s}^{-1}$  haben.  $\square$

### 2.2.3 Konkrete Ansätze zur Wahl der freien Energie

Typischerweise wird als Modell für die nichtkonvexe freie Energie  $\Psi$  der folgende in  $\varepsilon$  polynomiale Landau-Devonshire-Ansatz gewählt<sup>4</sup>,

$$\Psi(\varepsilon, \theta) = \Psi_0(\theta) + \Psi_1(\theta)\Psi_2(\varepsilon) + \Psi_3(\varepsilon), \quad (2.10a)$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi_0(\theta) &= c_v\theta(C_1 - \ln(\theta)) + C_2, \\ \Psi_1(\theta) &= \theta - \theta_M, \\ \Psi_2(\varepsilon) &= \frac{\alpha_1}{2}\varepsilon^2 \\ \Psi_3(\varepsilon) &= -\frac{\alpha_2}{4}\varepsilon^4 + \frac{\alpha_3}{6}\varepsilon^6, \end{aligned} \quad (2.10b)$$

wobei  $c_v, C_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  neben  $\theta_M$  weitere positive Materialkonstanten sind, und  $C_2 \in \mathbb{R}$  eine Normierung darstellt. Insbesondere ist  $c_v$  die in diesem Ansatz konstante spezifische Wärmekapazität, was sich unmittelbar aus

$$c_v(u_x, \theta) = -\theta\Psi_{\theta\theta}(u_x, \theta) = -\theta\Psi_0''(\theta) = c_v \quad (2.11)$$

ergibt. Um einen Eindruck physikalisch realistischer Parameter zu bekommen, seien hier die wesentlichen in [Bub95] verwendeten Größen angegeben. Dabei lassen sich  $c_v$  und  $\theta_M$  direkt experimentell bestimmen. Die Größe von  $\mu$  geht auf [Fal83] zurück, und wurde dort aus der Beobachtung gewonnen, daß Grenzflächen eine typische Dicke von wenigen Gitterzellen besitzen. Die Werte von  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  wurden schließlich in [Bub95] durch Abgleich experimentell erhaltener mit sich theoretisch ergebenden Hystereseschleifen bestimmt.

$$\begin{aligned} c_v &= 3.1274 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3\text{K}}, & \mu &= 2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{cm}}, & \theta_M &= 348.75 \text{ K}, \\ \alpha_1 &= 190 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3\text{K}}, & \alpha_2 &= 2.343 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3}, & \alpha_3 &= 2.49 \cdot 10^8 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

<sup>4</sup>bei Hinzunahme des Ginzburg-Terms  $e_G$  auch als Ginzburg-Landau Ansatz bezeichnet

**Bemerkung 2.6** Obwohl wir einheitenfrei rechnen wollen, haben wir der Vollständigkeit halber in (2.12) die Einheiten mit angegeben und bemerken, daß  $\Psi$  in obigen Einheiten die Dichte der freien Energie in  $\text{J cm}^{-3}$  angibt. In [Bub95] ergibt sich dann die freie Energie des Drahtes in Joule, indem über das (drei-dimensionale) Volumen des (realen) Drahtes integriert wird, d.h. es wird über die Länge des Stabes integriert und mit einem Querschnitt multipliziert. In diesem Sinne sind bis auf  $\theta_M$  die Größen in (2.12) mit  $\text{m}^3 \cdot 100^{-3} \text{kg}^{-1}$ , d.h. mit dem Inversen der Dichte in [Bub95], durchzumultiplizieren, um die von uns betrachtete freie Energiedosis zu erhalten.  $\square$

In dieser Arbeit werden wir in einigen Beispielen auf  $\Psi$  in der Form (2.10) mit den Daten (2.12) zurückkommen. Insbesondere können wir zu einer konkret gegebenen freien Energie die Temperaturen  $\theta_E, \theta_A$  und  $\theta_K$  sowie die Funktionen  $l_1(\theta)$  und  $l_2(\theta)$  explizit bestimmen. Zum Beispiel erhalten wir für  $l_1$  und  $l_2$ , gegeben durch

$$\sigma_\varepsilon(l_i, \theta) = (\theta - \theta_M)\alpha_1 - 3\alpha_2 l_i^2 + 5\alpha_3 l_i^4 \stackrel{!}{=} 0,$$

die Auflösung

$$\begin{aligned} l_1(\theta) &= \sqrt{y_1(\theta)} \quad \text{und} \quad l_2(\theta) = \sqrt{y_2(\theta)}, \quad \text{wobei} \\ y_{1,2}(\theta) &= \frac{3\alpha_2}{10\alpha_3} \mp \underbrace{\left( \frac{9\alpha_2^2}{100\alpha_3^2} - (\theta - \theta_M) \frac{\alpha_1}{5\alpha_3} \right)}_D^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dabei gilt  $D \geq 0$  für  $\theta \leq \theta_K = 400.97\text{K}$ . Weiter erhalten wir z.B.  $\theta_E = 370.52\text{K}$  und  $\theta_A = 377.76\text{K}$ . Dies soll nur zur weiteren Anschauung der physikalischen Größen dienen.

Mathematisch gesehen ist es jedoch eher sinnvoll, sich die wesentlichen benötigten Eigenschaften von  $\Psi$  zu verdeutlichen, und dann mit einer möglichst allgemeinen Form zu arbeiten, als sich von vornherein auf einen relativ konkreten Ansatz wie (2.10) festzulegen. Bei (2.10) handelt es sich ferner um einen Ansatz, mit dem sich lokal, d.h. für kleine Verzerrungen und in Bereichen um  $\theta_M$  bis  $\theta_K$  die gewünschten Eigenschaften leicht modellieren lassen, bei dem jedoch z.B. unklar ist, warum  $\Psi$  global wie  $\varepsilon^6$  wachsen sollte, oder etwa  $\sigma_\varepsilon = \alpha_1(\theta - \theta_M) + \Psi_3''(\varepsilon)$  linear in  $\theta$ , was sich eben aus der linearen Kopplung von  $\varepsilon^2$  und  $\theta$  im Ansatz (2.10) ergibt.

Es gibt nun verschiedene Ansätze, lokal die Eigenschaften von  $\Psi$  zu modellieren, die zu Phasenübergängen führen, und gleichzeitig ein global flexibleres Verhalten zu gewährleisten. In [Spr89] wird die Faktorisierung (2.10a) verwendet, und für  $l \equiv 0$  unter folgenden Voraussetzungen an  $\Psi_0$  bis  $\Psi_3$  die globale Existenz einer (schwachen) Lösung von  $(P_0)$  gezeigt:

- (i)  $\Psi_0, \Psi_1 \in C^3[0, \infty)$ ,  $\Psi_2, \Psi_3 \in C^3(\mathbb{R})$
- (ii)  $-\theta(\Psi_0''(\theta) + \Psi_1''(\theta)\Psi_2(\varepsilon)) \geq \bar{c}_1 > 0$  für alle  $(\varepsilon, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .
- (iii)  $\Psi_0(\theta) - \theta\Psi_0'(\theta) + (\Psi_1(\theta) - \theta\Psi_1'(\theta))\Psi_2(\varepsilon) + \Psi_3(\varepsilon) \geq \bar{c}_2|\varepsilon| - \bar{c}_3$   
für alle  $(\varepsilon, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .
- (iv)  $|\Psi_1(\theta)| + |\Psi_1'(\theta)| + |\theta\Psi_1'(\theta)| \leq \bar{c}_4$  für alle  $\theta \in [0, \infty)$ .

Dabei bedeutet (ii), daß der Koeffizient  $c_v(\varepsilon, \theta)$  vor  $\theta_t$  in (2.7b) von Null wegbeschränkt ist. Falls dies nicht der Fall ist, sagt man, daß die Energiebilanz degeneriert, und das Vorzeichen von  $c_v$  legt sozusagen die Richtung der Zeitachse fest. Weiter wird (ii) benötigt, um (solange die Lösung existiert) mit dem Maximumprinzip  $\theta(t, x) > 0$  zu gewährleisten, siehe Lemma 3.5. Voraussetzung (iii) bedeutet, daß die innere Energie  $e = \Psi - \theta\Psi_\theta$  nach unten beschränkt ist und geeignet wächst. Der Punkt ist, daß mit dieser Voraussetzung die Verzerrung  $u_x$  in den für globale Existenz notwendigen a-priori Abschätzungen in der  $L^\infty$  Norm beschränkt werden kann, vgl. Lemma 3.6. Wählt man nun  $\Psi_0, \Psi_2, \Psi_3$  wie in (2.10b), dann sollte, –um (iii) zu erfüllen und um weiterhin die in Abb.2.4 skizzierte Form von  $\Psi$  zu erhalten,  $\Psi_1$  in etwa von der Form  $c_1 \arctan(c_2(\theta - \theta_M))$  sein. Man beachte, daß mit dem Ansatz  $\Psi_1(\theta) = (\theta - \theta_M)$  wegen (2.11) und mit

$$\begin{aligned} e &= \Psi - \theta\Psi_\theta \\ &= c_v\theta(C_1 - \log(\theta)) + C_2 + (\theta - \theta_M)\Psi_1 + \Psi_2 - \theta(c_v(C_1 - 1 - \log \theta) + \Psi_1) \\ &= C_2 + \Psi_2 - \theta_M\Psi_1 + c_v\theta \end{aligned}$$

(ii) und (iii) erfüllt sind, jedoch nicht (iv). Im allgemeinen werden wir nun in dieser Arbeit einen in dieser Form auch in [Zhe95], Abschnitt 4.2 verwendeten Ansatz für  $\Psi$  zu Grunde legen, der insbesondere von  $\Psi$  in der Form (2.10) erfüllt wird. Es sei

$$\Psi(\varepsilon, \theta) = \Psi_0(\theta) + \theta\Psi_1(\varepsilon) + \Psi_2(\varepsilon), \quad (2.14)$$

woraus sich unmittelbar ergibt, daß die spezifische Wärmekapazität nur von  $\theta$  abhängt. Ferner sollen mit für den Rest der Arbeit fest als  $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3 > 0$  bezeichneten Konstanten folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

$$(H1) \quad \Psi_0 \in C^4((0, \infty), \mathbb{R}), \quad \Psi_1, \Psi_2 \in C^5(\mathbb{R})$$

$$(H2) \quad \text{Die Abbildung } \theta \mapsto c_v(\theta) = -\theta\Psi_0''(\theta) \text{ läßt sich zu einem Element von } C^2([0, \infty)) \text{ fortsetzen.}$$

$$(H3) \quad -\theta\Psi_0''(\theta) \geq \bar{C}_1 > 0 \text{ für alle } \theta \in [0, \infty).$$

$$(H4) \quad \Psi_1(\varepsilon) \geq 0, \quad \varepsilon\Psi_1'(\varepsilon) \geq 0, \quad \Psi_1''(\varepsilon) > 0, \quad \Psi_2(\varepsilon) \geq \bar{C}_2|\varepsilon| - \bar{C}_3 \text{ für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Ferner soll  $\Psi$  natürlich die in Definition 2.1 festgelegten Eigenschaften besitzen, mit den dort festgesetzten Bezeichnungen wie  $\varepsilon_-, \varepsilon_+$ , den verschiedenen Temperaturen und den Kurven  $l_1, l_2$ .

Als Ausnahme werden wir uns für das Problem  $(P_\gamma)$  auf  $c_v(\theta) = -\theta\Psi_0''(\theta) = c_v$  festlegen. Dieser Ansatz besitzt bei der mathematischen Behandlung den großen Vorteil, daß damit die (im Falle  $-\theta\Psi_{\theta\theta} \neq \text{const}$  nur quasilineare) Energiebilanz und damit das ganze System (2.7a,b) semilinear wird, sodaß uns die Theorie für solche Systeme, z.B. [Hen81], zur Verfügung steht. Dies ist eine wesentliche technische Erleichterung.

Wegen der aus der Symmetrie der Martensitphasen stammenden Symmetrie von  $\Psi(\cdot, \theta)$  tritt ferner stets das Problem auf, daß bei jeder endlichen Wachstumsbedingung in  $\varepsilon$  die grundlegende Forderung  $\Psi(\varepsilon, \theta) \rightarrow \infty$  für  $\varepsilon \rightarrow -1$  an das Materialgesetz verletzt ist. Das Material könnte also mit endlicher Energie auf einen Punkt zusammengedrückt werden und sich sogar selbst durchdringen. Dieses Problem können wir jedoch wegen der  $L^\infty$ -Beschränktheit von  $u_x$  kontrollieren, indem wir die Anfangsbedingungen und die zeitabhängige Dehnung in entsprechenden Schranken wählen.

## 2.3 Ein Literaturüberblick

### 2.3.1 Thermoelastischer Fall

Insbesondere das System (2.4a,b) wird für verschiedene Randbedingungen in einer Vielzahl von Arbeiten untersucht, z.B. in [Zhe95], Kapitel 4.2 (vgl. auch [SZ89]), in [SN91] und in [Bub95]. Dabei wird  $\Psi$  stets in der Form (2.10) angesetzt, und außer in [Bub95] erfolgt die Kontrolle des Systems durch äußere Lasten  $f$  und Wärmequellen  $g$ . In [Zhe95] finden sich Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für diese Situation, und für hinreichend glatte Anfangsbedingungen erhalten wir klassische globale Lösungen. In [SN91] wird ein Verfahren zur numerischen Behandlung von (2.4a,b) hergeleitet. Dann werden die Ergebnisse zweier temperaturgesteuerter Experimente präsentiert, in denen temperaturabhängige Übergänge zwischen den verschiedenen Phasen simuliert werden.

In [Bub95] wird das in Abb.2.1 beschriebene dehnungsgesteuerte Experiment betrachtet, wobei auch mögliche äußere Wärmequellen  $g$  beibehalten sind, und ferner der rechte Rand des Drahtes nicht notwendig als thermisch isoliert angesehen wird, sondern als Randbedingung

$$\theta_x(t, 1) = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}(\theta_\Gamma(t) - \theta(t, 1)) \quad (2.15)$$

gegeben ist. Dabei ist  $\bar{\kappa}$  ein Wärmeübergangskoeffizient und  $\theta_\Gamma(t)$  eine vorgegebene Außentemperatur, die also zusammen mit  $g$  zur zusätzlichen Steuerung des Systems dienen kann<sup>5</sup>. Zunächst zeigt Bubner wieder die globale Existenz klassischer Lösungen zu dieser Anfangsrandwertaufgabe bei hinreichend glatten Anfangsbedingungen. Ferner erhält er die Lösbarkeit des Kontrollproblems, d.h. zu gegebenen Anfangsbedingungen und zu einer gegebenen Zeit  $t_1$  existieren geeignete optimale Funktionen (Kontrollen)

$$g : [0, 1] \times [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta_\Gamma : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } l : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R},$$

so daß bei  $t = t_1$  eine gewünschte Verteilung von  $u_x$  und  $\theta$  erzielt wird. Anschließend werden mit den Daten aus (2.12) umfangreiche numerische Simulationen durchgeführt, wobei der Schwerpunkt in der Betrachtung von Hystereseschleifen in Last-Dehnungs-Diagrammen wie Abb.2.3 liegt, indem die Last am rechten Rand berechnet und über  $l(t)$  aufgetragen wird. Diese berechneten Diagramme werden mit tatsächlich gemessenen Last-Dehnungs-Diagrammen verglichen, und es wird eine qualitativ gute Übereinstimmung festgestellt. Insbesondere gelingt es durch geeignete Wahl des Dehnungszyklus die in Bemerkung 2.1 erwähnten inneren Hystereseschleifen zu simulieren. Es zeigen sich jedoch auch Einschränkungen des Ginzburg-Landau-Modells, und vor allem die Funktion und Größe des Grenzflächenenergiekoeffizienten  $\mu$  bleiben etwas fraglich.

Ein Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis zu dem System (2.5a,b), mit freier Energie in Landau-Devonshire-Form und Dirichlet-Randbedingungen in  $u$  und Neumann-Randbedingungen in  $\theta$  findet sich in [CH94]. Auch für dieses System erhalten wir bei geeigneten Anfangsbedingungen globale klassische Lösungen.

---

<sup>5</sup>diese Möglichkeit wird jedoch in den numerischen Simulationen nicht betrachtet

Die Existenz und Glattheit von Lösungen zu dem mit beiden Regularisierungen ausgestatteten System wird für verschiedene Randbedingungen in [HZ92] untersucht. In Abschnitt 2 wird dort insbesondere für den Spezialfall  $l \equiv 0$  die globale Existenz von Lösungen zu  $(P_\gamma)$  bewiesen. In Abschnitt 3.1 geben wir jedoch für  $(P_\gamma)$  und  $\dot{l}$  nicht notwendig identisch Null noch einen eigenen lokalen Existenzbeweis, und verweisen dann für die anschließend durchzuführenden a-priori Abschätzungen im Prinzip auf [HZ92], siehe Abschnitt 3.2.

Eine zusammenfassende Diskussion mit umfangreichen Literaturangaben über verschiedene Aspekte des Modellierens der thermoelastischen Eigenschaften von Formgedächtnislegierungen mit Verweisen auch auf den dreidimensionalen Fall und auf Modelle, bei denen die verschiedenen Phasen mittels Einführung einer sogenannten Phasenfunktion modelliert werden (Frémond-Modell), findet sich schließlich in [HM90]. Dort werden auch numerische Simulationen für die schwache Form des nicht regularisierten Problems (2.3a,b) präsentiert, und man erhält das erwartete Entstehen von Sprüngen in der Verzerrung, sobald bei Überschreiten der Grenzspannung Phasenübergänge stattfinden.

In dieser Arbeit soll nun das qualitative Verhalten von Lösungen zu  $(P_0)$  bzw.  $(P_\gamma)$  analytisch untersucht werden, insbesondere, ob Lösungen gegen eine stationäre Lösung konvergieren, wenn die äußere Anregung wegfällt ( $\dot{l} \equiv 0$ ), und welche stationäre Lösung dabei in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und von  $l \equiv \text{const}$  angestrebt wird. Im nächsten Abschnitt fassen wir dazu noch Ergebnisse aus [Peg87], [BHJ<sup>+</sup>91] und [FM96] zusammen, die die Asymptotik von Lösungen für den isothermen Fall mit viskoser Dämpfung und ohne Grenzflächenregularisierung untersuchen. Für den *thermoelastischen* Fall haben wir keine Arbeiten im Zusammenhang mit der Asymptotik von Lösungen bei nichtkonvexer freier Energie gefunden. Allerdings werden wir in Kapitel 4 wesentlich Methoden aus [Sle81] verwenden, um für geeignete Anfangsbedingungen die exponentielle Konvergenz gegen eine triviale stationäre Lösung zu beweisen.

Bezüglich der Frage nach nichttrivialen stationären Lösungen siehe die Referenzen in Kapitel 5.

### 2.3.2 Isothermer viskoser Fall ohne Grenzflächenenergie

In [BHJ<sup>+</sup>91] wird (als eines von drei Modellen zur Untersuchung der Dynamik des Entstehens von Mikrostrukturen) die isotherme Impulsbilanz

$$u_{tt} = [\sigma(u_x) + \gamma u_{tx}]_x - \alpha u \quad (2.16a)$$

mit viskoser Dämpfung  $\gamma > 0$  betrachtet, vgl. (2.5a), wobei  $\alpha \geq 0$  die Größe einer Rückstellkraft beschreibt, mit der der Draht auf einer Unterlage festgehalten wird. Wir werden uns hier im wesentlichen auf den Fall  $\alpha = 0$  beschränken, allerdings wird der Fall  $\alpha > 0$  in [BHJ<sup>+</sup>91] extra eingeführt, um die Formierung feinerer Mikrostrukturen energetisch zu bevorzugen, siehe Ende des Abschnittes. Die freie Energie, die im isothermen Fall oft auch als elastisches Potential bezeichnet wird und nur noch von  $\varepsilon$  abhängt (wenn wir hier wieder etwas ungenau die „Rückstellenergie“  $\frac{\alpha}{2}u^2$  ausklammern), wird als double-well Potential angenommen, vgl. Abb.2.4(a), wobei der Einfachheit halber in den beiden Minima  $\Psi = 0$  gelten soll. In [BHJ<sup>+</sup>91] wird die

konkrete Wahl  $\Psi(u_x) = \frac{1}{4}(u_x^2 - 1)^2$  getroffen. Ferner sei der Draht an beiden Rändern festgehalten, die Randbedingungen lauten also

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (2.16b)$$

und die Anfangsbedingungen seien

$$u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x). \quad (2.16c)$$

In [Peg87] wird Gleichung (2.16a) für  $\gamma = 1$  und  $\alpha = 0$  mit soft loading Randbedingungen behandelt, d.h. mit  $u(t, 0) = 0$ ,  $\sigma(u_x(t, 1)) + u_{tx}(t, 1) = F(t)$ , wobei wir aber im wesentlichen das gleiche Problem erhalten. Ein wesentliches Hilfsmittel zur Behandlung der Anfangsrandwertaufgabe (2.16) ist nun eine in der folgenden Form aus [Peg87] entnommene Transformation, die wir als Pego–Transformation bezeichnen wollen. Man setzt (im Fall  $\alpha = 0$ , der Fall  $\alpha \neq 0$  ist etwas abgewandelt)

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^x u_t(\xi) d\xi - \int_0^1 \int_0^\xi u_t(\xi) d\xi dx \\ q(x) &= -p(x) + \gamma u_x(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

und gelangt durch diese Substitution zu einer Evolutionsgleichung in  $p$  und  $q$  mit diagonalisiertem sektorielltem Linearteil, für die man geeignete globale Lösungen erhält, um auf diesem Umweg Lösungen von (2.16) im Phasenraum  $W^{1,\infty}(0, 1) \times L^2(0, 1)$  zu erhalten. Diese Methode werden wir in Abschnitt 3.1 auf das *thermo*-viskoelastische Problem  $(P_\gamma)$  übertragen.

Ein wichtiger Unterschied zwischen (2.16) und den Systemen  $(P_0)$  und  $(P_\gamma)$  ist nun, vgl. (2.24), daß entlang von Lösungen zu (2.16) die freie Energie

$$E^{(f)}(t) := E^{(f)}(u(t), u_t(t)) = \int_0^1 \frac{1}{2} u_t^2 + \Psi(u_x) + \frac{\alpha}{2} u^2 dx \quad (2.18)$$

des Drahtes (schwach) fällt (genauer: nicht wächst), denn mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} \dot{E}^{(f)} &= \int_0^1 u_t u_{tt} + \sigma u_{xt} + \alpha u u_t dx \\ &= \int_0^1 u_t (\sigma_x + \gamma u_{xxt} - \alpha u) + \sigma u_{xt} + \alpha u u_t dx = -\gamma \int_0^1 u_{xt}^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Damit liefert (2.16a,b) ein dynamisches System auf dem Phasenraum  $W^{1,\infty}(0, 1) \times L^2(0, 1)$  mit der Liapunov–Funktion  $E^{(f)}$ , und wegen der unteren Schranke  $I \geq 0$  „erwartet“ man, daß Lösungen in einer geeigneten Topologie gegen stationäre Lösungen streben, die Gleichgewichtslagen von  $E^{(f)}$  darstellen, und zwar vorzugsweise gegen lokale Minima. Bei einem aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung stammenden dynamischen System gilt dies für beschränkte Orbits, da diese wegen der endlichen Dimension des zugehörigen Phasenraums automatisch relativkompakt sind. Bei partiellen Differentialgleichungen muß die Relativkompaktheit von Orbits (in einer hinreichend starken Topologie) erst noch gezeigt werden, und es stellt sich heraus, daß diese für (2.16) (bzgl. der Norm–Topologie von  $W^{1,\infty}(0, 1) \times L^2(0, 1)$ ) nicht gegeben

ist. Dies ändert sich, wenn wir die Grenzflächenregularisierung  $\frac{\mu}{2}u_{xx}^2$  hinzunehmen, wodurch sich die Untersuchung der Asymptotik stark vereinfacht, siehe Abschnitt 3.3. In jedem Fall können wir jedoch auch für  $\mu = 0$  jegliches zeitlich periodische Verhalten von vornherein ausschließen.

Wir betrachten jetzt fürs erste den Fall  $\alpha = 0$ , und bemerken, daß die nichtlineare Randwertaufgabe

$$\sigma(u_x)_x = 0, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (2.20)$$

keine nichttrivialen glatten Lösungen besitzt, aber jedes stückweise affine  $u$ , das die Randbedingungen erfüllt, und für das  $\sigma(u_x) \equiv \text{const}$  ist, eine schwache Lösung darstellt. Mit obiger Wahl von  $\Psi(u_x) = \frac{1}{4}(u_x^2 - 1)^2$  erhält man ferner sofort  $E^{(f)}(u, 0) = 0$  für alle  $u$  mit  $u_x = \pm 1$  fast überall. Damit ist jedes solche  $u$  mit stückweise konstanter Verzerrung  $u' = \pm 1$  und der Nebenbedingung  $\int_0^1 u_x dx = 0$  (daß also die Phasen  $\pm 1$  wegen  $u(0) = u(1) = 0$  gleichverteilt sind) ein globales Minimum von  $E^{(f)}$ . Diese Menge  $M_1$  besteht aus bzgl. kleinen Störungen  $(u_0, u_1) \in W^{(1,\infty)}(0, 1) \times L^2(0, 1)$  exponentiell stabilen stationären Lösungen, siehe [Peg87], Satz 4.1, und ist offensichtlich nicht kompakt in  $W^{1,\infty}(0, 1)$ , dem in [Peg87] diskutierten Phasenraum für  $u$ . Tatsächlich ist nach [Peg87], Satz 4.1 die Menge  $M$  der exponentiell stabilen stationären Lösungen noch wesentlich größer, und enthält alle  $\bar{u} \in W^{1,\infty}(0, 1)$  mit  $\sigma(\bar{u}_x) = \text{const}$  und  $\sigma'(\bar{u}_x) \geq \sigma_0 > 0$  fast überall. Diese zweite Bedingung ist die Positivität der zweiten Variation  $\delta^2 E^{(f)}(\bar{u}, 0) > 0$ , und entsprechende Lösungen  $\bar{u}$  heißen relative schwache Minimierer von  $E^{(f)}$ , d.h.  $E^{(f)}(u + v, 0) \geq E^{(f)}(u, 0)$  für alle  $v \in W^{1,\infty}(0, 1)$  mit  $\|v\|_{W^{1,\infty}}$  klein. Dagegen heißen Lösungen  $\bar{u}$ , die zusätzlich in  $M_1$  liegen, starke Minimierer von  $I$ , d.h. für diese gilt (hier trivialerweise)  $E^{(f)}(u + v, 0) \leq E^{(f)}(u, 0)$  für alle  $v \in W^{1,\infty}(0, 1)$  mit  $\|v\|_{L^\infty}$  klein. Der Punkt ist, daß Lösungen aus  $M_1$  die sogenannten Maxwell-Bedingungen und damit die Weierstraß-Erdmann-Bedingungen erfüllen. Wir werden hierauf in Abschnitt 5.4 zurückkommen.

Man beachte dabei, daß sich obige exponentielle Stabilität auf Anfangsbedingungen bezieht, die die gleichen Sprünge in der Verzerrung aufweisen wie  $\bar{u}$ , da  $\|\partial_x u_0 - \bar{u}_x\|_{L^\infty}$  klein sein muß. Dies kann auch nicht anders sein, da in jeder  $W^{1,\infty}(0, 1)$  Umgebung von  $\bar{u}$  weitere solcher exponentiell stabiler Lösungen liegen. Aus diesen Gründen, der fehlenden a-priori Relativkompaktheit von Orbits, sowie der Nicht-Kompaktheit der Menge der stabilen stationären Lösungen und ihrer großen „geometrischen Kompliziertheit“, ist es schwer, allgemeine Aussagen über die Dynamik der Lösungen zu (2.16) zu treffen.

Dies ist unter anderem in der Einleitung von [FM96] ausführlicher zusammengefaßt, und soll hier nur die Kompliziertheit des Problems andeuten. Ferner sollen diese Bemerkungen dazu dienen, im Vergleich etwa zu den Abschnitten 3.3 und 5.6 die bedeutende Rolle der Regularisierung durch die Grenzflächenenergie zu verdeutlichen.

In [Peg87] ( $\alpha = 0$ ) wird nun folgendes gezeigt: Bezog sich die obige Stabilitätsaussage noch auf Anfangsbedingungen, die wie oben bemerkt selbst Sprünge (und zwar die gleichen wie ein  $\bar{u}$ ) in der Verzerrung aufweisen, so wird als nächstes die Asymptotik glatter Lösungen untersucht, bei denen die Anfangsbedingungen eine sogenannte „transition layer“ Struktur besitzen: Man erhält, daß wenn  $u_0 \in C^1(0, 1)$  im wesentlichen die gleiche Phasenverteilung aufweist wie eine stationäre Lösung  $\bar{u}$ , aber deren Sprünge in der Verzerrung in  $u_0$  zu (hinreichend steilen) Übergängen geglättet sind, und wenn die kinetische Energie der Anfangsbedingungen, also  $\|u_1\|_{L^2}$ , klein genug



ist, die Lösung zu diesen Anfangsbedingungen exponentiell gegen  $\bar{u}$  konvergiert. Daß der geglättete Übergang von einer Phase zu einer anderen hinreichend steil, d.h. das Übergangsgebiet dünn ist, bedeutet dabei, daß die elastische Energie der Anfangsbedingungen hinreichend klein ist.

Im Ergebnis folgt, daß die glatten Übergänge in den Anfangsbedingungen sich mit der Zeit exponentiell schnell aufteilen, daß insbesondere keine neuen Phasenübergänge entstehen können und die Orte der Phasengrenzen in der angestrebten stationären Lösung durch die Übergangsgebiete in den Anfangsbedingungen festgelegt sind. Dies wird in den auf [Peg87] aufbauenden Arbeiten [BHJ<sup>+</sup>91] und [FM96] als „Jumps do not move“ bzw. „lock-in“ der Übergangsgebiete bezeichnet.

Bemerkt sei, daß in allen drei Arbeiten [Peg87], [BHJ<sup>+</sup>91] und [FM96] die Untersuchung auf Anfangsbedingungen mit dünnen Übergangsgebieten eingeschränkt bleibt, daß also z.B. das Verhalten von Lösungen, die nahe  $u \equiv 0$  starten, –die Situation, bei der wir eine Art Nukleationsprozeß verschiedener Phasen im Draht erwarten, unklar bleibt.

Schließlich wollen wir noch auf die Rolle von  $\alpha$  hinweisen, hier als letzte Bemerkung zur Modellierung der Entwicklung von Mikrostrukturen im Zusammenhang mit Phasenübergängen. Im Falle  $\alpha > 0$  ergibt sich, daß das Infimum Null des Energiefunktionals

$$V(u) = E^{(f)}(u, 0) = \int_0^1 \frac{1}{4}(u_x^2 - 1)^2 + \frac{\alpha}{2}u^2 dx \quad (2.21)$$

nicht angenommen wird, da sich die Bedingungen  $u \equiv 0$  und  $u_x = \pm 1$  fast überall offensichtlich widersprechen. Stattdessen gibt es sogenannte minimierende Folgen  $(\phi_k)$  in  $W_0^{1,4}(0, 1)$ , wie etwa die aus [BHJ<sup>+</sup>91] entnommene Folge

$$\phi_k(x) = \frac{1}{k}g(kx) \quad \text{mit} \quad g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

die in  $W_0^{1,4}(0, 1)$  schwach gegen  $u \equiv 0$  konvergieren, aber  $u \equiv 0$  ist natürlich kein Minimum. Funktionalanalytisch betrachtet ist also  $V$  nicht nach unten halbstetig bzgl. der schwachen Konvergenz in  $W_0^{1,4}(0, 1)$ , und aus der Sicht der Variationsrechnung entspricht dies der mangelnden Elliptizität von  $V$ .

In [BHJ<sup>+</sup>91] (und [FM96]) wird nun die Frage vertieft, ob Lösungen zu (2.16) wegen (2.19) die Form solcher minimierender Folgen in gewissem Sinne nachahmen, und wir so die dynamische Entwicklung beliebig feiner Mikrostrukturen modellieren können. Sie tun dies nicht, siehe [BHJ<sup>+</sup>91], Abschnitt 4.1, sondern bleiben in Gleichgewichtslagen hängen, die im Falle von Anfangsbedingungen mit Übergangsgebietsstruktur wie oben beschrieben durch diese festgelegt sind. Dabei beachte man noch, daß die Gleichgewichtslagen nun durch  $\sigma(u_x)_x - \alpha u = 0$  gegeben sind, also nicht mehr stückweise affin sind, siehe [BHJ<sup>+</sup>91], Abschnitt 2.2. Ferner wird in [BHJ<sup>+</sup>91] darauf hingewiesen, daß  $\alpha > 0$  in dem Sinne einen Einfluß auf die Feinheit der Phasenstruktur hat, daß mit wachsendem  $\alpha$  die Zahl der notwendigen Sprünge in  $\varepsilon$  in stationären Lösungen wachsen muß.

Auch für die Probleme  $(P_0)$  und  $(P_\gamma)$  wollen wir die Frage untersuchen, ob Lösungen Mikrostrukturen entwickeln.

## 2.4 Energie- und Entropiefunktionale

Die freie Energie  $E^{(f)}(t)$  aus (2.18) können wir uns als Nicht-Physiker als die Fähigkeit des Drahtes vorstellen, (mechanische) Arbeit zu verrichten, welches der üblichen anschaulichen Definition der Energie entspricht. Bei der Untersuchung des isothermen Problems mit Grenzflächenregularisierung ist die freie Energie des Drahtes dann gegeben durch

$$E^{(f)}(t) := E^{(f)}(u_x + l, u_t + x\dot{l}, \theta) := \int_0^1 \frac{1}{2}(u_t + x\dot{l})^2 + \Psi(u_x + l, \theta) + \frac{\mu}{2}u_{xx}^2 dx, \quad (2.22)$$

wobei  $\theta \equiv \text{const}$  einen Parameter darstellt und wir die Substitution (2.6) berücksichtigt haben. Für  $E^{(f)}$  erhalten wir dann im Falle  $\dot{l} \equiv 0$  auch für  $\mu > 0$  wieder die sogenannte Dissipationsungleichung  $\dot{E}^{(f)} \leq -\gamma \int_0^1 u_{tx}^2 dx$ , siehe Abschnitt 3.3.

Für das volle Problem (P) jedoch ist die thermodynamisch korrekte Energie des Drahtes gegeben durch die innere Energie

$$E^{(i)}(t) := E^{(i)}(u_x + l, u_t + x\dot{l}, \theta) := \int_0^1 \frac{1}{2}(u_t + x\dot{l})^2 + e(u_x + l, \theta) + \frac{\mu}{2}u_{xx}^2 dx. \quad (2.23)$$

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik bleibt diese in einem abgeschlossenen System erhalten, und dies gilt in (P) für  $\dot{l} \equiv 0$ , denn dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{E}^{(i)} &= \int_0^1 u_t u_{tt} + \sigma u_{xt} + \Psi_\theta \theta_t - \theta_t \Psi_\theta - \theta \partial_t \Psi_\theta + \mu u_{xx} u_{xxt} dx \\ &= \int_0^1 u_t (\sigma_x - \mu u_{xxxx} + \gamma u_{xxt}) + \sigma u_{xt} + \kappa \theta_{xx} + \gamma u_{xt}^2 + \mu u_t u_{xxxx} dx \\ &= \kappa [\theta_x]_0^1 = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Der Dissipation (2.19) im isothermen Fall entspricht nun, daß die Entropie

$$\Upsilon(t) := \Upsilon(u_x + l, \theta) := \int_0^1 \eta(t, x) dx = \int_0^1 -\Psi_\theta(u_x + l, \theta) dx \quad (2.25)$$

des Drahtes entlang von Lösungen (schwach) wächst, denn Integration von (2.9) liefert

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon} &= \int_0^1 \eta_t dx = \int_0^1 \frac{1}{\theta} (\kappa \theta_{xx} + \gamma (u_{tx} + \dot{l})^2) dx \\ &= \kappa \int_0^1 \left(\frac{\theta_x}{\theta}\right)^2 dx + \gamma \int_0^1 \frac{1}{\theta} (u_{tx} + \dot{l})^2 dx \geq 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Den Effekt, daß auch im Fall  $\gamma = 0$  die Entropie (schwach) wächst, nennen wir dabei thermische Dissipation. Mit (2.26) stellt nun  $\Upsilon$  für das volle Problem (P) (und auch für  $\dot{l} \neq 0$ ) analog zu  $E^{(f)}$  im isothermen Fall mit  $\dot{l} \equiv 0$  eine Liapunov-Funktion dar, worauf wir jedoch erst wieder in Kapitel 6 zurückkommen werden. Dort werden wir ferner nur den Fall  $\dot{l} \equiv 0$  betrachten, und sehen, daß es hierfür günstiger ist, noch formal die Liapunov-Funktion  $L = E^{(i)} - \Upsilon$  einzuführen.

Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns nun zunächst mit der für die weitere Arbeit grundlegenden Frage der Existenz von Lösungen zu  $(P_0)$  und  $(P_\gamma)$ .

### 3 Existenz und Eindeutigkeit

In Abschnitt 3.1 geben wir unter Verwendung der Pego–Transformation einen lokalen Existenzbeweis für klassische Lösungen zu  $(P_\gamma)$ . Anschließend ist durch a–priori Abschätzungen zu zeigen, daß sich diese lokalen Lösungen global fortsetzen lassen. Eben solche a–priori Abschätzungen benötigt man auch für die globale Existenz von Lösungen zu  $(P_0)$ , und insgesamt führen wir diese nur in einem ersten Lemma in Abschnitt 3.2 aus, da die ganz ähnlichen Abschätzungen für den Fall  $\dot{l} \equiv 0$  bereits in einer Vielzahl von Arbeiten vorliegen, insbesondere in [Zhe95] für  $\gamma = 0$  und in [HZ92] für  $\gamma > 0$ .

Der in Abschnitt 3.1 vorgestellte abstrakte Rahmen wird dann in dem eingeschobenen Abschnitt 3.3 dazu verwendet, für den isothermen viskoelastischen Fall mit Grenzflächenregularisierung die Konvergenz von Lösungen zu beweisen. In Abschnitt 3.4 notieren wir schließlich einen aus [Zhe95] entnommenen Existenz–und Eindeutigkeitssatz für den nichtviskosen Fall. Die klassischen Lösungen werden wir für die Stabilitätsuntersuchungen in Kapitel 4 benötigen, und deshalb müssen wir im nichtviskosen Fall recht starke Voraussetzungen an die Regularität der Anfangsbedingungen stellen. Dagegen erhalten wir für  $(P_\gamma)$  auch bei schwächeren Anfangsbedingungen klassische Lösungen. Dies zeigt eine ausgesprochene Glättungseigenschaft der viskosen Dämpfung, und der grundlegende Unterschied zwischen  $(P_0)$  und  $(P_\gamma)$  liegt darin, daß für  $(P_\gamma)$  der Linearteil von (2.7) sektoriell ist und damit eine analytische Halbgruppe erzeugt, für  $(P_0)$  jedoch nicht.

Zuvor wollen wir jedoch eine einheitliche Schreibweise in Zusammenhang mit den Randbedingungen (2.7c,d) festlegen. Wie in (2.8) bereits bemerkt erhalten wir sofort  $u_{xxxx}(t, 0) = 0$  und  $u_{xxxx}(t, 1) = -\dot{l}(t)/\mu$ , wobei diese Aussage Sinn macht für  $u \in H^k(0, 1)$  mit  $k \geq 5$ . Bei entsprechender Glattheit der auftretenden Ausdrücke erhalten wir ferner

$$\theta_{xxx}(t, 0) = \theta_{xxx}(t, 1) = 0, \tag{3.1}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} [-\theta \Psi_{\theta\theta} \theta_t]_x &= -\underline{\theta_x} \Psi_{\theta\theta} \theta_t - \theta (\partial_\varepsilon \Psi_{\theta\theta} \underline{u_{xx}} + \partial_\theta \Psi_{\theta\theta} \underline{\theta_x}) \theta_t - \theta \Psi_{\theta\theta} \underline{\theta_{tx}} \\ &\stackrel{!}{=} \kappa \underline{\theta_{xxx}} + \underline{\theta_x} \sigma_\theta (u_{xt} + \dot{l}) + \theta (\sigma_{\theta\varepsilon} \underline{u_{xx}} + \sigma_{\theta\theta} \underline{\theta_x}) (u_{xt} + \dot{l}) \\ &\quad + \theta \sigma_\theta \underline{u_{txx}} + 2\gamma (u_{tx} + \dot{l}) \underline{u_{txx}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

und auf dem Rand sind alle unterstrichenen Terme gleich Null. Ferner beachte man auch das Verschwinden von  $u_{xxxx}$  in  $x = 1$  im Falle  $\dot{l} = 0$ . Analog verschwinden in diesem Falle auch  $\partial_x^5 \theta$  und  $\partial_x^6 u$  in  $x = 0$  und  $x = 1$ , sofern diese Terme hoher Ableitungsordnung (punktweise) definiert sind. Dies wird in Kapitel 4 eine wichtige Rolle spielen. Diese Dirichletrandbedingungen in  $u$  und Neumannrandbedingungen in  $\theta$  werden wir durch folgende Schreibweisen ausdrücken.

**Definition 3.1** Es bezeichne  $[\alpha]$  die größte ganze Zahl kleiner  $\alpha$ . Wir definieren

$$H_D^k(0,1) = \{u \in H^k(0,1) : u^{(l)}(0) = u^{(l)}(1) = 0 \text{ für } l = 0, 2, \dots, 2 \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\}$$

$$H_N^j(0,1) = \{\theta \in H^j(0,1) : \theta^{(l)}(0) = \theta^{(l)}(1) = 0 \text{ für } l = 1, 3, \dots, 2 \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor - 1\}.$$

### 3.1 Lokale Existenz und Eindeutigkeit für $(P_\gamma)$

Im viskosen Fall verwenden wir die bereits in Abschnitt 1.3.2 angegebene Pego-Transformation, wobei wir  $\theta$  einfach beibehalten,

$$\begin{aligned} p &= \int_0^x u_t d\xi - \int_0^1 \int_0^\xi u_t d\xi dx \\ q &= -p + \gamma u_x, \\ \theta &= \theta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die ursprünglichen Variablen  $u$  und  $u_t$  erhalten wir wegen  $u(t,0) = 0$  zurück aus

$$u(x) = \frac{1}{\gamma} \int_0^x (p+q)(\xi) d\xi \quad \text{und} \quad u_t(x) = p_x(x).$$

Ferner gilt

$$p_x(x) = u_t(x), \quad u_x(x) = \frac{1}{\gamma}(p+q)(x), \quad \text{und} \quad \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 q(x) dx = 0,$$

$p$  und  $q$  haben also insbesondere Mittelwert Null, und zusammenfassend notieren wir:

**Lemma 3.2** Die Pego-Transformation  $(u, u_t, \theta) \mapsto \mathcal{P}(u, u_t, \theta) = (p, q, \theta)$  ist ein Isomorphismus zwischen den Hilberträumen

$$H_D^{k+1}(0,1) \times H_D^{k-1}(0,1) \times H_N^m(0,1) \quad \text{und} \quad H_{N,a}^k(0,1) \times H_{N,a}^k(0,1) \times H_N^m(0,1),$$

wobei das zusätzliche Subskript  $a$  den Untervektorraum mit Mittelwert Null bezeichne.

Das System (2.7a,b) transformiert sich nun wie folgt; zunächst gilt

$$\begin{aligned} p_t &= \int_0^x u_{tt} d\xi - \int_0^1 \int_0^\xi u_{tt} d\xi dx \\ &= \int_0^x \sigma(u_x + l, \theta)_x - \mu(u + \xi l)_{xxxx} + \gamma(u + \xi l)_{xxt} - \xi \ddot{l} d\xi \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \sigma(u_x + l, \theta)_x - \mu(u + \xi_2 l)_{xxxx} + \gamma(u + \xi_2 l)_{xxt} - \xi_2 \ddot{l} d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) - \frac{\mu}{\gamma}(p+q)_{xx} + \gamma p_{xx} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2\right)\ddot{l} - \sigma_m(t). \end{aligned}$$

Dabei stellt

$$\sigma_m(t) = \int_0^1 \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) d\xi$$

die mittlere elastische Spannung im Draht dar und sorgt für die Projektion auf den Unterraum mit Mittelwert Null. Weiter gilt

$$\begin{aligned} q_t &= -p_t + \gamma u_{xt} \\ &= -\sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) + \frac{\mu}{\gamma}(p+q)_{xx} - \gamma p_{xx} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2\right)\ddot{l} + \sigma_m(t) + \gamma p_{xx} \\ &= -\sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) + \frac{\mu}{\gamma}(p+q)_{xx} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2\right)\ddot{l} + \sigma_m(t). \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch oBdA  $c_v = 1$  annehmen, so erhalten wir insgesamt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \\ \theta \end{pmatrix} + BA_\Delta \begin{pmatrix} p \\ q \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) - \sigma_m + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2\right)\ddot{l} \\ -\sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) + \sigma_m - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2\right)\ddot{l} \\ \theta\sigma_\theta\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right)(p_{xx} + \dot{l}) + \gamma(p_{xx} + \dot{l})^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\gamma} + \gamma & -\frac{\mu}{\gamma} & 0 \\ \frac{\mu}{\gamma} & \frac{\mu}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_\Delta = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x^2 \end{pmatrix},$$

und die Rand- und Anfangsbedingungen transformieren sich mittels  $p_x = u_t$  und  $q_x = -p_x + \gamma u_{xx}$  zu

$$\begin{aligned} p_x(t, 0) = p_x(t, 1) = q_x(t, 0) = q_x(t, 1) &= 0, \\ \int_0^1 p dx = \int_0^1 q dx &= 0, \\ \theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$(p(0, \cdot), q(0, \cdot), \theta(0, \cdot)) = (p_0, q_0, \theta_0) = \mathcal{P}(u_0, u_1, \theta). \quad (3.5b)$$

**Lemma 3.3** *Es seien  $p_0, q_0 \in H_{N,a}^3(0, 1)$  und  $\theta_0 \in H_N^2(0, 1)$ , sowie  $l \in C^3([0, \infty), \mathbb{R})$ . Dann besitzt die Anfangsrandwertaufgabe (3.4), (3.5) eine lokale Lösung*

$$\begin{aligned} (p, q, \theta) &\in C([0, T]; H_{N,a}^3(0, 1) \times H_{N,a}^3(0, 1) \times H_N^2(0, 1)) \\ &\cap C((0, T); H_{N,a}^4(0, 1) \times H_{N,a}^4(0, 1) \times H_N^3(0, 1)) \\ &\cap C^1((0, T); H_{N,a}^2(0, 1) \times H_{N,a}^2(0, 1) \times H^1(0, 1)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit einem  $T > 0$ , sodaß (3.5b) erfüllt ist in  $H^3(0, 1) \times H^3(0, 1) \times H^2(0, 1)$ , und (3.4) klassisch für  $0 < t < T$ .

**Beweis.** Wir setzen  $z = (p, q, \theta)$ ,  $A = BA_\Delta$ , bezeichnen die rechte Seite von (3.4) als  $f(z) = (f_1(z), f_2(z), f_3(z))^T$  und behandeln (3.4) in der Terminologie von [Hen81] als abstrakte nichtautonome parabolische Gleichung

$$z_t + Az = f(t, z) \quad (3.7)$$

$$z(0) = z_0 = (p_0, q_0, \theta_0) \quad (3.8)$$

auf dem Banachraum

$$X = H_a^1(0, 1) \times H_a^1(0, 1) \times L^2(0, 1).$$

Zunächst wollen wir [Hen81], Theorem 3.3.3 anwenden, und dazu ist zu zeigen, daß  $A$  mit

$$D(A) = H_{N,a}^3(0,1) \times H_{N,a}^3(0,1) \times H_N^2(0,1) \subset X \quad (3.9)$$

ein sektorieller Operator ist und daß  $f : U \rightarrow X$ ,  $(t, z) \mapsto f(t, z)$  wohldefiniert, lokal Hölder-stetig in  $t$  und lokal Lipschitz-stetig in  $z$  ist, mit  $U$  offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times X^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , wobei die Räume  $X^\alpha$  weiter unten charakterisiert werden. Wir setzen  $\phi_k(x) = \cos(k\pi x)$  und haben ausgehend von der  $L^2$ -Orthonormalbasis  $(\phi_k)_{k=0,1,\dots}$  von Eigenfunktionen von  $-\partial_x^2$  mit Eigenwerten  $\lambda_k = k^2\pi^2$  die folgende Charakterisierung der Räume  $H_N^m(0,1)$ ,  $m \geq 0$ ,

$$H_N^m(0,1) = \left\{ p = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\pi x) : \|p\|_m^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^{2m} c_k^2 < \infty \right\}. \quad (3.10)$$

Dabei gilt  $c_0 = 0$ , falls wir  $H_{N,a}^m(0,1)$  betrachten. Es sind die Eigenfunktionen von  $A$  offensichtlich von der Form

$$z_k^{(j)} = y^{(j)} \cos k\pi x, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, 3 \text{ bzw. } j = 3 \text{ für } k = 0$$

mit  $y^{(j)}$  Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $\beta_j$ , wobei

$$\beta_{1,2} = \frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 - 4\mu} \quad \text{und} \quad \beta_3 = \kappa,$$

und wir uns die Eigenvektoren  $y^{(j)}$  der Einfachheit halber orthonormiert denken bzgl. des Skalarprodukts  $(x, y) = x \cdot \bar{y}$  auf dem  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ . Dabei ist wichtig, daß der Raum für  $\theta$  und die Räume für  $p$  und  $q$  im Linearteil  $A$  von (3.7) entkoppeln, daß also gilt

$$y^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, 0), \quad y^{(2)} = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, 0) \quad \text{und} \quad y^{(3)} = (0, 0, 1). \quad (3.11)$$

Die zugehörigen Eigenwerte von  $A$  sind gegeben durch

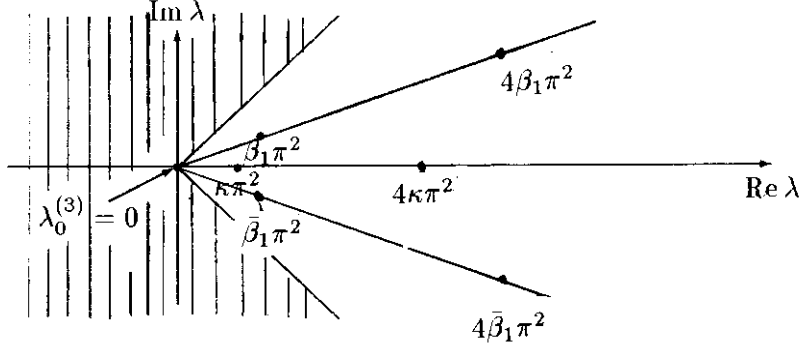
$$\lambda_k^{(1)} = \beta_1 k^2 \pi^2, \quad \lambda_k^{(2)} = \beta_2 k^2 \pi^2 \quad \text{und} \quad \lambda_k^{(3)} = \beta_3 k^2 \pi^2.$$

Da  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  alle Realteil größer Null haben und die Eigenfunktionen  $z_k^{(j)}$  eine Basis von  $D(A) \subset X$  darstellen<sup>1</sup>, erhalten wir, daß die Resolventenmenge von  $A$  den Sektor

$$S_{0,\phi} = \{ \lambda : \phi \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi, \lambda \neq 0 \} \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \arg(\beta_1) \right)$$

enthält, vgl. Abb.3.1. Dabei beachte man, daß stets gilt  $\arg(\beta_1) = -\arg(\beta_2) < \pi/2$ , wobei tatsächlich  $\arg(\beta_1) = 0$ , falls  $\gamma^2 - 4\mu \geq 0$ . Ordnen wir weiter die  $y^{(j)}$  in einer Matrix  $M = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$  an, so können wir die Diagonalisierung von  $A$  explizit

<sup>1</sup>vgl. Lemma (A.6), das wir in Abschnitt 4.1.1 benötigen, hier ist die Aussage jedoch offensichtlich

Abbildung 3.1: Das Spektrum von  $A$  und der Sektor  $S_{a,\phi}$  (schraffiert)

aufschreiben als

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & M & & \\ & & M & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}}_{=: \hat{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & & \\ & \lambda_1^{(2)} & \\ & & \lambda_1^{(3)} \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_2^{(1)} & & \\ & \lambda_2^{(2)} & \\ & & \lambda_2^{(3)} \end{pmatrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}}_{=: D} \hat{M}^H$$

mit  $\hat{M}^H = \hat{M}^{-1} = \text{diag}(1, M^H, M^H, \dots)$ , wobei  $M^H = \bar{M}^T$ . Die eingefügten Klammern sollen den Unterschied zwischen der skalaren ersten Zeile und den weiteren  $3 \times 3$ -Block-Zeilen verdeutlichen, Leerplätze stehen überall für Nullen. Analog erhalten wir

$$(\lambda \text{Id} - A)^{-1} = \hat{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & & \\ & \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_1^{(1)})^{-1} & & \\ & (\lambda - \lambda_1^{(2)})^{-1} & \\ & & (\lambda - \lambda_1^{(3)})^{-1} \end{pmatrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}}_{=(\lambda \text{Id} - D)^{-1}} \hat{M}^H \quad (3.12)$$

und es folgt (beachte  $\|\hat{M}\|_{\mathcal{L}(l^2, l^2)} = \max\{1, \|M\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)}\} = 1$  da  $\|M\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)} = 1$ )

$$\|(\lambda \text{Id} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X)} = \sup(\{|\lambda - \lambda_k^{(j)}|^{-1} : k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3\} \cup \{|\lambda|^{-1}\}) \leq \frac{C}{|\lambda|}$$

für ein  $C \geq 1$  für alle  $\lambda \in S_{0, \phi}$ , womit insgesamt folgt, daß  $A$  sektoriell ist. Weiter erhalten wir mittels der Spektraldarstellung von  $A$  die folgende Charakterisierung der Operatoren  $A^\alpha$ ; es sei  $z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} z_k^{(j)}$ , dann ist

$$A^\alpha z = A^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} z_k^{(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k^{(j)})^\alpha c_k^{(j)} z_k^{(j)},$$

und nach Definition  $X^\alpha = \{z \in X : A^\alpha z \in X\}$  erhalten wir damit für  $\alpha = 7/8$  (diese Wahl ist insofern willkürlich, als daß  $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$  im folgenden genügt)

$$X^{7/8} = H_{N,a}^{11/4}(0, 1) \times H_{N,a}^{11/4}(0, 1) \times H_N^{7/4}(0, 1).$$

Dies können wir wegen (3.11) für die einzelnen Faktorräume von  $X$  getrennt begründen, wobei die Multiplikation mit den festen Eigenwerten  $\beta_j$  sowie mit  $\pi^2$  keine Rolle spielt. Ferner verwenden wir implizit die Poincaré-Ungleichungen, was wir insgesamt durch Konstanten  $C$  ausdrücken, und erhalten

$$\begin{aligned} (L^2(0, 1))^{7/8} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \theta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k \in L^2 : \|(-\partial_x^2)^{7/8} \theta\|_{L^2}^2 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{((k^2)^{7/8} c_k)^2}_{=k^{7/2} c_k^2} < \infty \right\} \\ &\stackrel{(3.10)}{=} H_N^{7/4}(0, 1), \\ (H_a^1(0, 1))^{7/8} &= \left\{ p = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \in H_a^1 : \|(-\partial_x^2)^{7/8} p\|_{H_a^1}^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^2 ((k^2)^{7/8} c_k)^2}_{=k^{11/2}} < \infty \right\} \\ &= H_{N,a}^{11/4}(0, 1), \end{aligned}$$

(und durch analoge Rechnung folgt auch (3.9)). Die Wahl von  $X$  erklärt sich nun durch die speziellen Eigenschaften der Nichtlinearität  $f$  wie folgt. Da  $f_3$  die gleiche Ableitungsordnung  $p_{xx}$  wie der Linearteil  $A$  enthält, muß der Raum für  $\theta$  geeignet schwächer als der Raum für  $p$  gewählt werden, damit  $f$  wohldefiniert ist. Dies ist hier möglich, da die Gleichung für  $\theta$  im Linearteil von den beiden anderen entkoppelt. Für  $p$  und  $q$  muß der gleiche Raum angesetzt werden, da die Gleichungen für  $p$  und  $q$  im Linearteil mit gleicher Ableitungsordnung gekoppelt sind. Sei nun  $z = (p, q, \theta) \in X^{7/8}$ , dann ist  $p_{xx} \in H^{3/4}$ , und nach Satz A.1 (i) ( $n = 1, p = 2, m = 3/4$ ) folgt  $p_{xx} \in L^4(0, 1)$  (und tatsächlich sogar  $p_{xx} \in C^{0,1/4}[0, 1]$ ). Damit ist  $(p_{xx} + i)^2 \in L^2(0, 1)$  wohldefiniert. Da ferner die Einbettung  $H^{3/4}(0, 1) \hookrightarrow L^4(0, 1)$  stetig ist (sogar kompakt), ist (die polynomiale Abbildung)  $p_{xx} \mapsto p_{xx}^2$  lokal Lipschitz-stetig von  $H^{3/4}(0, 1)$  nach  $L^2(0, 1)$ . Die Wohldefiniertheit aller anderen Terme in  $f$  sowie die lokale Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  in  $z$  als Abbildung von  $X^{7/8}$  nach  $X$  folgen schließlich aus den Einbettungen

$$\theta \in H^{7/4}(0, 1) \hookrightarrow C^{1,1/4}[0, 1] \quad p, q \in H^{11/4}(0, 1) \hookrightarrow C^{2,1/4}[0, 1] \quad (3.13)$$

und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $\sigma$  und  $\sigma_\theta$ . Entsprechend folgt die lokale Hölder-Stetigkeit in  $t$  aus (3.13), aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $\sigma$  und  $\sigma_\theta$  und aus  $l \in C^3(0, t_1)$ .

Damit existiert nach [Hen81], Theorem 3.3.3 eine Zeit  $T > 0$  und eine lokale Lösung

$$(p, q, \theta) \in C([0, T]; X^{7/8}) \cap C((0, T); D(A)) \cap C^1((0, T); X), \quad (3.14)$$

sodaß die Anfangsbedingungen gelten und (3.7) erfüllt ist als Identität in  $X$ . Ferner gilt nach [Hen81], Theorem 3.5.2 die höhere Regularität  $z \in C^1((0, T); X^\eta)$  für  $0 \leq \eta < 1$ , also

$$(p, q, \theta) \in C^1((0, T); H_{N,a}^2(0, 1) \times H_{N,a}^2(0, 1) \times H_N^2(0, 1)) \quad (3.15)$$



für z.B.  $\eta = 1/2$ , und  $z_t$  ist lokal Hölder-stetig mit  $\|z_t\|_{X^\eta} \leq Ct^{\alpha-\eta-1}$ . Wir erhalten nun die in Lemma 3.3 behauptete Regularität von  $p, q$  und  $\theta$  mittels folgender Überlegung. Es gilt  $(p, q, \theta) \in C((0, T); D(A) = H_{N,a}^3(0, 1) \times H_{N,a}^3(0, 1) \times H_N^2(0, 1))$ , und mit den analogen Einbettungen wie (3.13) folgt

$$f \in C((0, T) \times D(A); H_{N,a}^2(0, 1) \times H_{N,a}^2(0, 1) \times H^1(0, 1)). \quad (3.16)$$

Mit (3.15) und (3.16) folgt nun

$$t \mapsto Az(t) = f(t, z(t)) - z_t(t) \in C((0, T); H_{N,a}^2(0, 1) \times H_{N,a}^2(0, 1) \times H^1(0, 1))$$

und damit

$$z = (p, q, \theta) \in C((0, T); H_{N,a}^4(0, 1) \times H_{N,a}^4(0, 1) \times H_N^3(0, 1)),$$

und mit diesem „bootstrap-Verfahren“ ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 3.1** Aus dem Beweis geht hervor, daß wir bei der Formulierung von Lemma 3.3 noch Regularität verschenkt haben, da  $(p, q, \theta)_t$  tatsächlich sogar Hölder-stetig nach  $X^\eta$  abbilden, sowie daß wir mit den schwächeren Anfangsbedingungen  $(p_0, q_0, \theta_0) \in X^{7/8}$  statt  $(p_0, q_0, \theta_0) \in D(A)$  auskommen. Wir werden dieses Resultat, das durch geeignete Wahl von  $\alpha, \eta$  und  $X$  noch verbessert werden kann, nicht verwenden, sondern belassen es bei der einfacheren Formulierung in Lemma 3.3.  $\square$

Um im nächsten Schritt die globale Existenz von Lösungen zu erhalten, reicht es nach [Hen81], Theorem 3.3.4 zu zeigen, daß

$$\|z(t)\|_{X^{7/8}}^2 = \|p(t)\|_{H^{11/4}}^2 + \|q(t)\|_{H^{11/4}}^2 + \|\theta(t)\|_{H^{7/4}}^2$$

für alle endlichen Zeiten  $t$  beschränkt bleibt. Wir kontrollieren dazu

$$\|p\|_{H^3}^2 + \|q\|_{H^3}^2 + \|\theta\|_{H^2}^2 \geq \|p\|_{H^{11/4}}^2 + \|q\|_{H^{11/4}}^2 + \|\theta\|_{H^{7/4}}^2,$$

denn wegen Lemma 3.2 können wir diese a-priori Abschätzungen auch in den intuitiv besser zugänglichen ursprünglichen Variablen  $u, u_t, \theta$  durchführen, und es reicht, Abschätzungen für

$$\|u\|_{H^4}^2 + \|u_t\|_{H^2}^2 + \|\theta\|_{H^2}^2$$

zu gewinnen. Dies bezeichnen wir als verallgemeinerte Energieabschätzungen. Dabei haben wir die Schreibweise  $\|u\|_X$  für  $\|u(t, \cdot)\|_X$  verwendet, und sofern klar ist, welches  $t$  wir meinen, benutzen wir diese Schreibweise auch im weiteren. Ferner bezeichnet  $\|\cdot\|$  stets die  $L^2(0, 1)$ -Norm, alle anderen Normen werden entsprechend gekennzeichnet. Zuvor notieren wir noch den lokalen Existenzsatz in diesen ursprünglichen Variablen, und versichern uns der Positivität von  $\theta$  auf  $[0, T) \times [0, 1]$ .

**Satz 3.4** Für  $(u_0, u_1, \theta_0) \in H_D^4(0, 1) \times H_D^2(0, 1) \times H_N^2(0, 1)$  und  $l \in C^3((0, \infty), \mathbb{R})$  besitzt  $(P_\gamma)$  eine eindeutige lokale Lösung

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T); H_D^4(0, 1)) \cap C((0, T); H^5(0, 1)) \\ &\quad \cap C^1([0, T); H_D^2(0, 1) \cap C^1((0, T); H_D^3(0, 1))) \\ &\quad \cap C^2((0, T); H_D^1(0, 1)) \\ \theta &\in C([0, T); H_N^2(0, 1)) \cap C((0, T); H_N^3(0, 1)) \\ &\quad \cap C^1((0, T); H^1(0, 1)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

für ein  $T > 0$ , sodaß (2.7a), (2.7b) klassisch erfüllt sind für  $0 < t < T$ .

**Lemma 3.5** Solange die Lösung existiert, d.h. für alle  $(t, x) \in [0, T) \times [0, 1]$  gilt

$$\theta(t, x) > 0. \quad (3.18)$$

**Beweis.** Auf  $(0, T) \times [0, 1]$  erfüllt  $\theta$  die unter Verwendung von  $\sigma_\theta(u_x + l, \theta) = \Psi_1(u_x + l)$  in  $\theta$  lineare, gleichmäßig parabolische Gleichung

$$\kappa \theta_{xx} - c_v \theta_t + \underbrace{\theta \Psi_1(u_x + l)}_{=h(t,x)} (u_{tx} + \dot{l}) = -\gamma (u_{tx} + \dot{l})^2 \leq 0.$$

Die Behauptung folgt nun durch Anwendung von [PW67], Kapitel 3, Theorem 7 auf  $-\theta$  unter Beachtung der ebendort anschließenden Bemerkung (ii), welche die in manchen Formulierungen des Maximumsprinzips notierte zusätzliche Bedingung  $h \geq 0$  eliminiert.  $\square$

### 3.2 Zur globalen Existenz, $(P_0)$ und $(P_\gamma)$

Ebenso wie für  $(P_\gamma)$  erhält man auch für  $(P_0)$  zunächst lokale Lösungen, und durch globale a-priori Energieabschätzungen ist zu zeigen, daß sich die lokalen Lösungen global fortsetzen lassen. Diese a-priori-Abschätzungen sind, jeweils für  $l \equiv 0$ , in [Zhe95] für den Fall  $\gamma = 0$  durchgeführt, sowie für den Fall  $\gamma > 0$  und  $\Psi$  in der Form (2.10) in [HZ92]. Das unten folgende Lemma zeigt, –es entspricht Lemma 4.2.2 aus [Zhe95], respektive Abschnitt 2, Schritt (ii), in [HZ92], daß es sich im Fall  $\dot{l} \neq 0$  prinzipiell um die gleichen Rechnungen handelt. Deshalb betrachten wir hier nur diesen ersten Schritt, der sowohl für  $(P_\gamma)$  als auch für  $(P_0)$  die globale Beschränktheit von  $\|u\|_{H^2} + \|\theta\|_{L^1}$  und damit insbesondere die von  $\|u_x\|_{L^\infty}$  liefert, um zu zeigen, was sich im Fall  $\dot{l} \neq 0$  prinzipiell ändert, sowie welche Rolle die Bedingungen (H3) und (H4) spielen. Für  $(P_0)$  denken wir uns dabei eben  $\gamma = 0$ . Wie üblich werden wir diverse von  $u_0, u_1, \theta_0, l, \dot{l}, \ddot{l}$  und von  $T$ , nicht jedoch von  $0 \leq t \leq T$  abhängige positive Konstanten mit  $C$  bezeichnen.

**Lemma 3.6** Zu  $T > 0$  beliebig existiert ein  $C_T > 0$ , sodaß für  $0 \leq t \leq T$  gilt

$$\|u_t\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_x\|_{L^1} + \|\theta\|_{L^1} + \frac{\gamma}{2} \int_0^t \|u_{tx}\|^2 d\tau \leq C_T \quad (3.19)$$

$$\|u_x\|_{L^\infty} \leq C_T \quad (3.20)$$

**Beweis.** Es folgt (3.20) aus (3.19) nach Sobolev. Um die erste Aussage zu beweisen, testen wir zunächst die Impulsbilanz mit  $u$ , und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^1 u(u_{tt} + x\ddot{l} - \gamma u_{txx} + \mu u_{xxxx} - (\theta \Psi_1'(u_x + l) + \Psi_2'(u_x + l))_x) dx d\tau \\ &= \left[ \int_0^1 uu_t dx \right]_0^t - \int_0^t \int_0^1 u_t^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 x \ddot{l} u dx d\tau + \gamma \int_0^t \int_0^1 u_x u_{tx} dx d\tau \\ &\quad + \mu \int_0^t \int_0^1 u_{xx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 u_x (\theta \Psi_1' + \Psi_2') dx d\tau \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} [\|u_x\|^2]_0^t + \mu \int_0^t \|u_{xx}\|^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \theta u_x \Psi_1' + u_x \Psi_2' dx d\tau \\ &\leq \underbrace{\int_0^t \int_0^1 u_t^2 dx d\tau}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\int_0^t \int_0^1 |x \ddot{l} u| dx d\tau + \left[ \int_0^1 |uu_t| dx d\tau \right]_0^t}_{\textcircled{2}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Wir schätzen nun die Terme ① und ② unter Verwendung der Ungleichungen von Young, Hölder und Poincaré ((A.1) und (A.2)) wie folgt ab:

$$\textcircled{1} \leq \frac{\mu}{2} \int_0^t \int_0^1 u^2 dx d\tau + \frac{1}{4\mu} \int_0^t \int_0^1 \dot{i}^4 dx d\tau \leq \frac{\mu}{2} \int_0^t \|u_{xx}\|^2 + C d\tau \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\leq C + \delta \int_0^1 u_t^2(t, x) dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 u^2(t, x) dx \\ &\leq C + \delta \|u_t\|^2 + \int_0^1 \left( u(0, x) + \int_0^t u_t(\tau, x) d\tau \right)^2 dx \\ &\leq C + \delta \|u_t\|^2 + C \int_0^t \int_0^1 u_t^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Als nächstes testen wir die Impulsbilanz mit  $u_t$  und addieren die Energiebilanz,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^1 u_t (u_{tt} + x\ddot{i} - \gamma u_{txx} + \mu u_{xxxx} - (\theta \Psi'_1(u_x + l) + \Psi'_2(u_x + l))_x) \\ &\quad + \underbrace{c_v(\theta)}_{\geq \bar{C}_1 \text{ nach (H3)}} \theta_t - \kappa \theta_{xx} - \theta (u_{tx} + \dot{i}) \Psi'_1(u_x + l) - \gamma (u_{tx} + \dot{i})^2 dx d\tau \\ \Leftrightarrow &\left[ \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\mu}{2} \|u_{xx}\|^2 + \bar{C}_1 \|\theta\|_{L^1} \right]_0^1 + \gamma \int_0^t \|u_{tx}\|^2 d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \underbrace{u_{tx} \theta \Psi'_1(u_x + l)}_{\textcircled{3}} + (u_{tx} + \dot{i}) \Psi'_2(u_x + l) - \dot{i} \Psi'_2(u_x + l) \\ &\quad - \underbrace{\theta u_{tx} \Psi'_1(u_x + l)}_{\textcircled{4}} - \theta \dot{i} \Psi_1(u_x + l) dx d\tau \\ &\leq \underbrace{\int_0^t \int_0^1 x \dot{i} u_t dx d\tau}_{\textcircled{5}} + \underbrace{\gamma \int_0^t \int_0^1 (u_{tx} + \dot{i})^2 dx d\tau}_{\textcircled{6}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Es kürzt sich ③ gegen ④, und dies ist einer der entscheidenden Tricks bei der hier verwendeten Methode, siehe Bemerkung 3.2. Wie oben schätzen wir weiter ⑤ und ⑥ ab zu

$$\textcircled{5} \leq C + \int_0^t \int_0^1 u_t^2 dx d\tau, \quad (3.25)$$

$$\textcircled{6} \leq \frac{\gamma}{2} \int_0^t \int_0^1 u_{tx}^2 + \dot{i}^2 dx d\tau \leq C + \frac{\gamma}{2} \int_0^t \int_0^1 u_{tx}^2 dx d\tau. \quad (3.26)$$

Wir addieren nun (3.21) und (3.24), was zunächst natürlich nur in den hier betrachten dimensionlosen Größen erlaubt ist, da (3.21) im zugrunde liegenden physikalischen Problem die Einheit  $\text{m}^3\text{s}^{-1}$  hat, wohingegen (3.24) die Einheit  $\text{m}^3\text{s}^{-2}$ , vgl. Bemerkung 2.6. Im physikalischen Sinne addieren wir also z.B. (3.21) und s.(3.24). Unter

Verwendung von (3.22),(3.23) und (3.25),(3.26) erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \|u_t(t)\|^2 + \frac{\mu}{2} \|u_{xx}(t)\| + \bar{C}_1 \|\theta(t)\|_{L^1} + \frac{\gamma}{2} \int_0^t \|u_{tx}\|^2 d\tau \\
& \quad + \frac{\gamma}{2} \|u_x\|^2 + \underbrace{\frac{\mu}{2} \int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 dx d\tau}_{\geq 0} \\
& \quad + \int_0^t \int_0^1 \underbrace{\theta(u_x - \dot{l}) \Psi'_1(u_x + l)}_{\textcircled{7}} + \underbrace{(u_x - \dot{l}) \Psi'_2(u_x + l)}_{\textcircled{8}} + \underbrace{(u_{tx} + \dot{l}) \Psi'_2(u_x + l)}_{\textcircled{9}} dx d\tau \\
& \leq C + C \int_0^t \int_0^1 u_t^2 dx d\tau. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Da wir hier wie in der gesamten Arbeit annehmen, daß  $l$ ,  $\dot{l}$  und  $\ddot{l}$  unabhängig von  $t$  beschränkt sind, gilt nun nach (H4) (siehe Seite 19)  $(u_x - \dot{l}) \Psi'_1(u_x + l) \geq -C$  sowie  $(u_x - \dot{l}) \Psi'_2(u_x + l) \geq C|u_x| - C$  und darum

$$\textcircled{7} \geq -C\theta, \quad \textcircled{8} \geq C|u_x| - C \tag{3.28}$$

Ferner können wir  $\textcircled{9} = \frac{d}{dt} \Psi_2(u_x + l)$  in der Zeit integrieren zu

$$\int_0^t \int_0^1 (u_{tx} + \dot{l}) \Psi'_2(u_x + l) dx d\tau = \left[ \int_0^1 \Psi_2(u_x + l) dx \right]_0^t, \tag{3.29}$$

und wiederum mit  $\Psi_2(u_x + l) \geq \bar{C}_2|u_x + l| - \bar{C}_3 \geq \bar{C}_2|u_x| - C$  erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \|u_t\|^2 + \frac{\mu}{2} \|u_{xx}\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|u_x\|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_0^t \|u_{tx}\|^2 d\tau + \bar{C}_1 \|\theta\|_{L^1} \\
& \leq C + C \int_0^t \int_0^1 u_t^2 + \theta dx d\tau. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun bei Wahl von  $\delta < \frac{1}{2}$  mittels des Lemma von Gronwall, siehe Anhang.  $\square$

**Bemerkung 3.2** Wir notieren folgenden grundlegenden Unterschied zwischen den Fällen  $\dot{l} \equiv 0$  und  $\dot{l} \not\equiv 0$ . Im ersteren Falle ist (3.19) eine unmittelbare Konsequenz der Energieerhaltung, und es genügt, nur die Impulsbilanz mit  $u_t$  zu testen. Man erhält

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^t \int_0^1 u_t (u_{tt} - \sigma(u_x + l, \theta)_x + \mu u_{xxxx} - \gamma u_{xxt}) dx d\tau \\
&= \left[ \frac{1}{2} \|u_t^2\| + \frac{\mu}{2} \|u_{xx}\|^2 \right]_0^t + \int_0^t \int_0^1 \sigma(u_x + l, \theta) u_{tx} + \gamma u_{tx}^2 dx d\tau,
\end{aligned}$$

und mit  $e = \Psi - \theta \Psi_\theta$  gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^1 \sigma(u_x + l, \theta) u_{tx} + \gamma u_{tx}^2 dx d\tau &= \int_0^t \int_0^1 \sigma(u_x + l, \theta) \underbrace{(u_{tx} + \dot{l})}_{=0} + \gamma (u_{tx} + \dot{l})^2 dx d\tau \\
&= \int_0^1 \int_0^t \frac{d}{dt} e(u_x + l, \theta) d\tau dx \\
&= \int_0^1 e(u_x(t, x) + l, \theta(t, x)) dx - C.
\end{aligned}$$

Aus (H3) und (H4) folgt

$$e(u_x + l, \theta) = \Psi_0(\theta) - \theta \Psi_0'(\theta) + \Psi_2(u_x + l, \theta) \geq C(|u_x + l| + \theta) - C, \quad (3.31)$$

und damit folgt insgesamt

$$\frac{1}{2} \|u_t^2\| + \frac{\mu}{2} \|u_{xx}\|^2 + C_1(\|u_x\|_{L^1} + \|\theta\|_{L^1}) \leq C_2 \quad (3.32)$$

mit  $C_1, C_2$  nur abhängig von den Anfangsbedingungen, jedoch nicht von  $T$ . Mit anderen Worten ist der Vorwärtsorbit

$$\gamma^+((u_0, u_1, \theta_0)) = \bigcup_{t \geq 0} (u(t), u_t(t), \theta(t))$$

beschränkt in  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^1(0, 1)$ , wenn wir nicht am rechten Rand ziehen. Eine Aussage wie (3.32) können wir im Fall  $\dot{l} \neq 0$  natürlich nicht erwarten, und die Schwierigkeit beim Beweis von Lemma 3.6 liegt darin, daß wir

$$\int_0^t \int_0^1 u_{tx} \sigma(u_x + l, \theta) + \gamma(u_t x + \dot{l}) dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} e \right) - \underbrace{\dot{l} \sigma(u_x + l, \theta)}_{\textcircled{a}} dx d\tau$$

nicht einfach in der Zeit integrieren können. Stattdessen müssen wir die Faktorisierung (2.14) sowie (3.21) benutzen, um den störenden Term  $\textcircled{a}$  zu kontrollieren.  $\square$

### 3.3 Isothermer viskoser Fall mit Grenzflächenenergie I

Fassen wir  $\theta$  als Parameter auf, so erhalten wir folgende isotherme viskoelastische Impulsbilanz mit Grenzflächenregularisierung zuzüglich Randbedingungen,

$$u_{tt} = \sigma_\varepsilon(u_x + l, \theta) u_{xx} + \gamma u_{txx} - \mu u_{xxxx} - x \ddot{l}, \quad (3.33a)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad (3.33b)$$

und Anfangsbedingungen  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $u_t(0, x) = u_1(x)$ . Wir skizzieren zunächst noch einmal einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für dieses Anfangsrandwertproblem unter Verwendung der Pego-Transformation, wobei sich im Vergleich zu Abschnitt 3.1 ein wesentlicher Unterschied ergibt. Als zugehörige Gleichung in  $(p, q)$  erhalten wir nun

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + DA_\Delta \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) - \sigma_m + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2\right)\ddot{l} \\ -\sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p+q) + l, \theta\right) + \sigma_m - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2\right)\ddot{l} \end{pmatrix} =: f(t, p, q) \quad (3.34)$$

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\gamma} + \gamma & -\frac{\mu}{\gamma} \\ \frac{\mu}{\gamma} & \frac{\mu}{\gamma} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_\Delta = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

sowie die entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen. Da nun in der Nichtlinearität keine Ableitungen mehr auftreten, können wir als „Grundraum“  $X = L^2 \times L^2$  verwenden. Wir erhalten dann  $D(A) = H_{N,\alpha}^2(0, 1) \times H_{N,\alpha}^2(0, 1)$ , und wählen  $\alpha = 1/2$ .

Dies liefert  $X^\alpha = H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1)$ , und mit den analogen Einbettungen wie in Abschnitt 3.1 folgt wiederum, daß  $f$  lokal Lipschitz und lokal Hölder ist von  $[0, \infty) \times X^{1/2}$  nach  $X$ . Der Punkt dabei ist, daß analog zu (3.32) für  $(p_0, q_0) \in X^{1/2}$  und  $\dot{l} \equiv \mathbf{0}$  der Vorwärtsorbit beschränkt ist in  $X^{1/2}$ , respektive die Lösung  $(u, u_t)$  in  $H^2(0,1) \times L^2(0,1)$ . Damit werden wir dann die Relativkompaktheit von Orbits in  $H^2(0,1) \times L^2(0,1)$  erhalten. Ferner ist für  $\dot{l} \equiv 0$  die freie Energie (mit  $\theta$  als Parameter)

$$E^{(f)}(u_x + l, u_t + x \underbrace{\dot{l}}_{=0}, \theta) = \int_0^1 \frac{1}{2} u_t^2 + \Psi(u_x + l, \theta) + \frac{\mu}{2} u_{xx}^2 dx, \quad (3.36)$$

eine Liapunov-Funktion auf dem aus dem Phasenraum  $\mathcal{C} := H_D^2(0,1) \times L^2(0,1)$  und der Familie

$$\{S(t; l, \theta) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, (u_0, u_1) \mapsto S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)), t \geq 0\} \quad (3.37)$$

nichtlinearer Abbildungen gebildeten dynamischen System, denn es ist  $E^{(f)}(\cdot, \theta)$  stetig auf  $\mathcal{C}$  und wie in (2.19) gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \dot{E}^{(f)} &= \int_0^1 u_t (\sigma_\varepsilon(u_x + l, \theta) u_{xx} + \gamma u_{txx} - \mu u_{xxxx}) + \sigma(u_x + l, \theta) u_{xt} + \mu u_{xx} u_{xxt} dx \\ &= -\frac{\gamma}{2} \int_0^1 u_{tx}^2 dx, \end{aligned} \quad (3.38)$$

woraus wir insgesamt weitreichende Aussagen über die Asymptotik von Lösungen erhalten. Dies zeigen wir jetzt im einzelnen, wobei sich die topologischen Begriffe wie Konvergenz oder Stetigkeit auf die  $H^2(0,1) \times L^2(0,1)$ -Norm-Topologie von  $\mathcal{C}$  beziehen.

Zunächst gehen wir wie im Beweis von Lemma 3.3 vor, –mit den entsprechenden Änderungen die Räume betreffend, um für  $(p_0, q_0) = \mathcal{P}(u_0, u_1) \in H^1(0,1) \times H^1(0,1)$  die Existenz einer lokalen Lösung

$$\begin{aligned} (p, q) \in & C([0, T]; H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1)) \\ & \cap C((0, T); H_{N,a}^3(0,1) \times H_{N,a}^3(0,1)) \\ & \cap C^1((0, T); H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1)) \end{aligned}$$

mit einem  $T > 0$  zu zeigen. Es ist dann (3.33) erfüllt für  $0 < t < T$  als Gleichung in  $L^2(0,1)$ .

Im ersten Schritt erhalten wir dabei mit [Hen81], Theorem 3.3.3

$$\begin{aligned} (p, q) \in & C([0, T]; H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1)) \\ & \cap C((0, T); H_{N,a}^2(0,1) \times H_{N,a}^2(0,1)) \\ & \cap C^1((0, T); L^2(0,1) \times L^2(0,1)). \end{aligned}$$

Als nächstes folgt die höhere Regularität  $(p, q) \in C^1((0, T); H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1))$  mit [Hen81], Theorem 3.5.2. Da wiederum  $f$  lokal Lipschitz ist in  $z = (p, q)$  und lokal Hölder in  $t$  von  $(0, T) \times D(A)$  nach  $X^{1/2} = H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1)$ , folgt mit dem „bootstrap-Verfahren“

$$t \mapsto Az(t) = f(t, z(t)) - z_t(t) \in C((0, T); H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1))$$

und damit  $z \in C((0, T); H_{N,a}^3(0, 1) \times H_{N,a}^3(0, 1))$ , was zu zeigen war. In den ursprünglichen Größen erhalten wir damit unter Verwendung von Lemma 3.2 und mit den unten folgenden a-priori Abschätzungen wiederum:

**Satz 3.7** Für  $(u_0, u_1) \in H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  existiert eine eindeutige globale Lösung

$$\begin{aligned} u \in & C([0, \infty); H_D^2(0, 1)) \cap C((0, \infty); H_D^4(0, 1)) \\ & \cap C^1([0, \infty); L^2(0, 1)) \cap C^1((0, \infty); H_D^2(0, 1)) \\ & \cap C^2((0, \infty); L^2(0, 1)), \end{aligned} \quad (3.39)$$

sodaß (3.33) erfüllt ist für  $t > 0$  in  $L^2(0, 1)$ .

Um zu zeigen, daß die erhaltene lokale Lösung global fortsetzbar ist, müssen wir dabei  $\|(p, q)\|_{X^{1/2}} = \|(p, q)\|_{H^1 \times H^1}$  kontrollieren, und hierzu genügt es  $\|(u, u_t)\|_{H^2 \times L^2}$  a-priori abzuschätzen. Hier beschränken wir uns auf den Fall  $\dot{l} \equiv 0$ , der das für uns wesentliche Resultat liefert, der allgemeine Fall ist analog zu Lemma 3.6. Für den Rest dieses Abschnitts sei also  $l$  beliebig aber fest. Dann gilt, vgl. Bemerkung 3.2,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^1 u_t(u_{tt} - \sigma(u_x + l, \theta)_x + \mu u_{xxxx} - \gamma u_{xxt}) dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} [\|u_t\| + \mu \|u_{xx}\|]_0^t + \gamma \int_0^t \int_0^1 u_{tx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \sigma(u_x + l, \theta)(u_{tx} + \underbrace{\dot{l}}_{=0}) dx d\tau, \end{aligned}$$

und mit  $\sigma(u_x + l, \theta)u_{tx} = \frac{d}{dt} \Psi(u_x + l, \theta)$  folgt

$$\int_0^t \int_0^1 \sigma u_{tx} dx d\tau = \left[ \int_0^1 \underbrace{\Psi(u_x + l, \theta)}_{\geq C_1 |u_x + l| - C_2} dx \right]_0^t,$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\mu}{2} \|u_{xx}\|^2 + \gamma \int_0^t \int_0^1 u_{tx}^2 dx d\tau + C_1 \|u_x\|_{L^1} \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\partial_x^2 u_0\|^2 + \int_0^1 \Psi(u_0 + l, \theta) dx + C_2 + C_1 |l| =: C. \end{aligned}$$

Also ist  $\|(u, u_t)\|_{H^2 \times L^2} \leq C$ , respektive

$$\|(p(t), q(t))\|_{X^{1/2}} \leq C \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (3.40)$$

und wir wollen [Hen81], Theorem 3.3.6 anwenden, um zu zeigen, daß die nach (3.40) in  $X^{1/2}$  beschränkten Orbits relativkompakt sind. Hier greift der zweite wesentliche Unterschied zum thermoelastischen Fall, nämlich daß der Operator  $A : D(A) \rightarrow X$  in (3.34) keinen Nulleigenwert mehr besitzt, denn die Eigenwerte  $\lambda_k^{(1),(2)}$  und Eigenvektoren  $z_k^{(1),(2)}$  von  $A$  sind nun gegeben durch

$$z_k^{(j)} = y^{(j)} \cos(k\pi x), \quad \lambda_k^{(j)} = \beta^{(j)} k^2 \pi^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Damit existiert die Inverse  $A^{-1} : X \rightarrow D(A)$ , und ist bei analoger Rechnung wie in Abschnitt 3.1, nun mit  $M = (y^{(1)}, y^{(2)})$ , gegeben durch die Spektraldarstellung

$$A^{-1} = \text{diag}(M, M, \dots) \text{diag}((\lambda_1^{(1)})^{-1}, (\lambda_1^{(2)})^{-1}, (\lambda_2^{(1)})^{-1}, \dots) \text{diag}(M^H, M^H, \dots),$$

vgl. (3.12), sodaß ferner  $A^{-1}$  kompakt ist nach Lemma A.5.

Mit [Hen81], Theorem 3.3.6 folgt nun, daß für alle  $(p_0, q_0) \in X^{1/2}$  der Vorwärts-Orbit  $\gamma^+((p_0, q_0)) = \bigcup_{t \geq 0} (p(t), q(t))$  relativkompakt ist in  $X^{1/2}$ , und damit auch  $\gamma^+((u_0, u_1))$  in  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Nach [Hen81], Theorem 4.3.3 folgt daraus weiter, daß die  $\omega$ -Limesmenge

$$\omega((u_0, u_1)) = \{(v, w) \in C : \exists \text{ eine Folge } (t_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ mit } t_n \rightarrow \infty \\ \text{so daß } ((u(t_n), u_t(t_n)) \rightarrow (v, w) \text{ für } n \rightarrow \infty\}$$

von  $(u_0, u_1)$  nichtleer und invariant, sowie kompakt und zusammenhängend bezüglich der  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ -Norm-Topologie ist, mit ferner

$$\|(u(t), u_t(t)) - \omega((u_0, u_1))\|_{H^2 \times L^2} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

Dabei heißt eine Menge  $K \subset C$  (positiv) invariant, wenn gilt

$$\forall (u_0, u_1) \in K \text{ gilt: } S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)) \in K \quad \forall t \geq 0.$$

Als nächstes definieren wir die Menge

$$B := \{(v, w) \in H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) : \\ \dot{E}^{(f)}(\partial_x v, w, \theta) := \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (E^{(f)}(S(t)(\partial_x v, w), \theta) - E^{(f)}(\partial_x v, w, \theta)) = 0\}$$

der bzgl. des durch die Familie  $\{S(t) : t \geq 0\}$  erzeugten Flusses stationären Punkte der Liapunov-Funktion  $E^{(f)}(\cdot, \theta)$ , und es sei

$$M = \text{die maximal invariante Teilmenge von } B, \quad (3.42)$$

d.h.  $\forall (u_0, u_1) \in M$  gilt  $(u(t), u_t(t)) \in M$  für alle  $t \geq 0$ , und  $M$  ist bzgl. der Mengeneinklusion maximal unter den invarianten Teilmengen von  $B$ . Damit gilt gerade (wobei wir also ab hier wieder die gegebenen festen Parameter  $\theta$  und  $l$  mitführen)

$$M = G(\theta, l) \times \{0\} \text{ mit } G(\theta, l) := \text{Menge der stationären Lösungen von (3.33),}$$

denn sei  $(u_0, u_1) \in M$ , so folgt

$$0 = \dot{E}^{(f)}(u_x(t), u_t(t), \theta) = - \int_0^1 u_{tx}^2 dx \stackrel{(A.1)}{\leq} - \int_0^1 u_t^2 dx \leq 0 \text{ für alle } t \geq 0,$$

und damit  $u_t \equiv 0$ . Nach [Hen81], Theorem 4.3.4 gilt nun

$$u(t) \rightarrow G(\theta, l) \quad \text{für alle } (u_0, u_1) \in H^2(0, 1) \times L^2(0, 1). \quad (3.43)$$



Wenn wir nun noch annehmen, daß  $G(\theta, l)$  in  $H^2(0, 1)$  eine diskrete Menge ohne Häufungspunkte ist, daß also die Lösungen der nichtlinearen Randwertaufgabe

$$\sigma(u_x + l, \theta)_x - \mu u_{xxxx} = 0, \quad (3.44a)$$

$$u(0) = u(1) = u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0, \quad (3.44b)$$

isoliert liegen in  $H^2(0, 1)$ , d.h.

$$\forall \bar{u} \in G(\theta, l) \quad \exists \delta > 0, \text{ soda\ss } B_{H^2(0,1)}^\delta(\bar{u}) \cap G(\theta, l) = \{\bar{u}\},$$

so folgt insgesamt, daß zu beliebigen Anfangsbedingungen  $(u_0, u_1)$  die Lösung  $u(t)$  in  $H^2(0, 1)$  gegen genau eine Lösung des stationären Problems konvergiert.

Es bleibt die Frage, welches  $\bar{u} \in G(\theta, l)$  in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen angestrebt wird. Bezüglich der trivialen Lösung  $\bar{u} \equiv 0$  geben wir eine Antwort in Unterabschnitt 4.4.1. Dort notieren wir (als Spezialfall des temperaturabhängigen Problems  $(P_\gamma)$ ), unter welchen Voraussetzungen an  $l, \theta$  und  $(u_0, u_1)$   $\bar{u} \equiv 0$  exponentiell stabil ist. Das allgemeinere Konzept der Suche nach (nichttrivialen) stationären Lösungen von (3.33), die Minima der freien Energie in  $H^2(0, 1)$  darstellen, greifen wir dann in Abschnitt 5.5 wieder auf, und fassen schließlich die Ergebnisse für das isotherme System in Abschnitt 5.6 zusammen.

In Kapitel 5, siehe insbesondere Bemerkung 5.6, werden wir ferner die Annahme motivieren, daß die Elemente der i.a. sehr komplizierten Menge  $G(\theta, l)$  isoliert liegen in  $H^2(0, 1)$ . Allerdings werden wir dies auch dort nicht allgemein beweisen, sondern nur, daß die spezielle asymptotisch stabile nichttriviale stationäre Lösung, die wir in Abschnitt 5.5 betrachten, isoliert liegt.

### 3.4 Existenz und Eindeutigkeit ohne Viskosität

Durch Übertragung von Satz 4.2.1 aus [Zhe95] auf die Randbedingung  $u(t, 1) = l(t)$  erhalten wir folgenden Globalen Existenzsatz für Lösungen zu (P) im Fall  $\gamma = 0$ .

**Satz 3.8** *Es seien  $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^5(0, 1) \cap H_D^4(0, 1) \times H_D^3(0, 1) \times H_N^3(0, 1)$ . Dann besitzt  $(P_0)$  für beliebiges  $T > 0$  eine eindeutige Lösung*

$$\begin{aligned} u &\in C^0([0, T]; H^5(0, 1) \times H_D^4(0, 1)) \cap C^1([0, T]; H_D^3(0, 1) \cap C^2([0, T]; H^1(0, 1))) \\ \theta &\in C^0([0, T]; H_N^3(0, 1)) \cap C^1([0, T]; H^1(0, 1)), \end{aligned}$$

soda\ss (2.7a), (2.7b) klassisch erfüllt sind für  $t \geq 0$ . Ferner gilt  $\theta(t, x) > 0$  für alle  $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$ .

Der Beweis ist analog zu dem in [Zhe95], deshalb skizzieren wir nur die wesentlichen Schritte. Es seien  $M_0, M_1$  zwei positive Konstanten, und

$$\begin{aligned}
X_h(M_0, M_1) = \{ & (u, \theta) : u \in C([0, h]; H^5(0, 1) \cap H_D^4(0, 1)) \cap C^1([0, h]; H_D^3(0, 1)) \\
& \cap C^2([0, h]; H_D^1(0, 1)), \\
& \theta \in C([0, h]; H_N^3(0, 1)) \cap C^1([0, h]; H_N^1(0, 1)), \\
& \cap L^2([0, h]; H_N^4(0, 1)), \\
& u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), \theta(0, x) = \theta_0(x), \\
& \theta(t, x) > 0 \text{ für } (t, x) \in [0, h] \times [0, 1] \\
& \max_{t \in [0, h]} (\|u(t)\|_{H^5} + \|u_t(t)\|_{H^3} + \|u_{tt}(t)\|_{H^1}) \leq M_0, \\
& \max_{t \in [0, h]} (\|\theta(t)\|_{H^3} + \|\theta_t(t)\|_{H^1}) \\
& \left. + \int_0^h \|\theta\|_{H^4}^2 + \|\theta_t\|_{H^2}^2 + \|\theta_{tt}\|_{H^1}^2 d\tau \leq M_1 \right\}
\end{aligned}$$

mit einem zu bestimmenden  $h > 0$ . Für  $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in X_h(M_0, M_1)$  betrachten wir die linearen Hilfsprobleme

$$u_{tt} + \mu u_{xxxx} = [\sigma(\tilde{u}_x + l, \tilde{\theta})]_x - x \ddot{l} \quad (3.45)$$

$$c_v(\tilde{\theta})\theta_t - \kappa\theta_{xx} - \theta\sigma_\theta(\tilde{u}_x + l, \tilde{\theta})(\tilde{u}_{xt} + \dot{l}) = 0, \quad (3.46)$$

wieder mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen.

Für die  $u$ -Gleichung (3.45) setzen wir  $H = H^1(0, 1)$ ,  $V = H^3(0, 1)$  und  $A = \partial_x^4 : D(A) = (H^5(0, 1) \cap H_D^4(0, 1)) \rightarrow H$ . In  $H$  betrachten wir nun wieder die Orthonormalbasis  $\phi_k(x) = \sin(k\pi x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  von Eigenfunktionen von  $A$ . Die zugehörigen Eigenwerte sind  $\lambda_k = \pi^4 k^4$ , und es folgt, daß der selbsadjungierte strikt positive Operator  $A$  auf  $V$  die symmetrische koerzitive Bilinearform

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle$$

induziert. Dabei bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Dualitätsprodukt in  $V$ . Bezeichnen wir weiter die rechte Seite von (3.45) als  $f(t, x)$ , so gilt wegen  $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in X_h(M_0, M_1)$   $f \in H^1([0, h]; H^1(0, 1))$ , und unter Verwendung von [Zhe95], Theorem 1.3.3 erhalten wir für (3.45) eine eindeutige Lösung

$$u \in C([0, h]; H^5(0, 1) \cap H_D^4(0, 1)) \cap C^1([0, h]; H_D^3(0, 1)) \cap C^2([0, h]; H_D^1(0, 1)).$$

In analoger Weise erhalten wir für (3.46) eine eindeutige Lösung

$$\theta \in C([0, h]; H_N^3(0, 1)) \cap C^1([0, h]; H_N^1(0, 1)),$$

und mit dem Maximumprinzip folgt wieder  $\theta > 0$  auf  $[0, h] \times [0, 1]$ .

In einem nächsten Schritt ist zu zeigen, daß (für hinreichend kleine  $h$ ) der nichtlineare Operator  $T_h$ , der Funktionen  $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in X_h(M_0, M_1)$  die entsprechenden Lösungen von (3.45) und (3.46) zuordnet,  $X_h(M_0, M_1)$  nach  $X_h(M_0, M_1)$  abbildet. Dies, sowie der für die eindeutige lokale Existenz von Lösungen abschließende Schritt, daß (für  $h$

klein genug)  $T_h$  eine strikte Kontraktion auf dem Banachraum  $X_h(M_0, M_1)$  darstellt, geschieht durch entsprechende Energieabschätzungen, siehe [Zhe95].

Um schließlich wieder die globale Existenz von Lösungen zu erhalten, ist bei dieser Beweismethode nun zu zeigen, daß

$$\|u\|_{H^5}^2 + \|u_t\|_{H^3}^2 + \|u_{tt}\|^2 + \|\theta\|_{H^3}^2 + \|\theta_t\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|\theta\|_{H^4}^2 + \|\theta_t\|_{H^2} + \|\theta_{tt}\|^2 d\tau$$

für alle  $t > 0$  beschränkt bleibt. Die benötigten a-priori Abschätzungen sind in [Zhe95] (für den Fall  $\dot{l} \equiv 0$ ) ausführlich präsentiert, sodaß wir es hier mit Hinweis auf die Ausführungen in Abschnitt 3.2 bei dieser Beweisskizze belassen.

## 4 Exponentielle Konvergenz gegen eine triviale stationäre Lösung

In diesem Kapitel untersuchen wir, unter welchen Umständen Lösungen zu  $(P_0)$  bzw.  $(P_\gamma)$  gegen eine triviale stationäre Lösung konvergieren. Dies betrachten wir zum einen getrennt von der allgemeinen Asymptotik von Lösungen, um zunächst die Stabilität der Menge der trivialen stationären Lösungen zu verstehen. Zum zweiten erhalten wir dabei besonders starke Konvergenzresultate (exponentielle Konvergenz), und können ferner eine Verallgemeinerung auf den Fall  $\dot{l} \neq 0$  zeigen.

Physikalisch liegt der Untersuchung der Stabilität der trivialen Lösungen die Frage zu Grunde, unter welchen Bedingungen sich das System (2.7) klassisch thermoelastisch bzw. thermoviskoelastisch verhält, d.h. unter welchen Bedingungen finden keine Phasenübergänge statt ?

In Abschnitt 4.1 zeigen wir dazu mittels linearisierter Stabilitätsanalyse, daß eine triviale stationäre Lösung  $(u, \theta) \equiv (0, \bar{\theta})$  (bzw.  $u = xl$  nach Rücksubstitution von (2.6)) sowohl für  $(P_0)$  als auch für  $(P_\gamma)$  linear instabil ist, wenn gilt

$$\sigma_\varepsilon(l, \bar{\theta}) < -\pi^2 \mu. \quad (4.1)$$

Damit erhalten wir zunächst eine notwendige Bedingung für die Stabilität trivialer stationärer Lösungen von  $(P_0)$  und  $(P_\gamma)$ . Eine hinreichende Bedingung können wir mit linearisierter Stabilitätsanalyse bei den gegebenen Neumann–Randbedingungen in  $\theta$  wegen des zu konstanten Temperaturverschiebungen gehörigen Null–Eigenwerts unmöglich erhalten, respektive wegen des ganzen Kontinuums trivialer stationärer Lösungen.

Die Bedingung (4.1) teilt die  $\theta$ – $l$ –Parameterenebene in zwei disjunkte Gebiete, und das Gebiet, in dem (4.1) erfüllt ist, werden wir das Stabilitätsgebiet  $\mathcal{S}$  der trivialen stationären Lösungen nennen. Zunächst zeigen wir dann (Satz 4.4), daß für  $\dot{l} \equiv 0$  Lösungen von  $(P_0)$  oder  $(P_\gamma)$ , die nahe einem  $(l, \bar{\theta}) \in \mathcal{S}$  starten, exponentiell gegen eine triviale stationäre Lösung konvergieren. Dabei benötigen wir für  $(P_0)$  noch die zusätzliche Bedingung  $\sigma_\theta(l, \bar{\theta}) \neq 0$ , d.h. daß linear die thermisch–mechanische Kopplung nicht verschwindet.

Für  $(P_\gamma)$  können wir darüberhinaus für den Fall  $\dot{l} \neq 0$  mit  $|\dot{l}|$  hinreichend klein die Verallgemeinerung zeigen, daß sich die Verschiebung (wieder nach Rücksubstitution von (2.6)) verhält zu

$$u(t, x) \approx x \cdot l(t),$$

siehe Satz 4.5. Die Beweise der Sätze 4.4 und 4.5 beruhen auf umfangreichen a–priori Abschätzungen verallgemeinerter Energieausdrücke, die in der hier durchgeführten Form eng an [Sle81] angelehnt sind.

Um jedoch zunächst die Idee dieser Abschätzungen zu verdeutlichen, stellen wir diese in Abschnitt 4.2 an Hand der Gleichungen der linearisierten Thermoelastizität und Thermoviskoelastizität vor. Da die Gleichungen der linearisierten Thermoelastizität und Thermoviskoelastizität üblicherweise im Rahmen der Halbgruppentheorie linearer Operatoren behandelt werden, sind im Anhang die benötigten Definitionen und Sätze zusammengestellt in der Form, wie wir sie hier verwenden. Insbesondere wird

in Unterabschnitt 4.2.1 der klassische Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für den linearen Fall rekapituliert, da er unmittelbar mit der klassischen Methode zum Beweis der exponentiellen Konvergenz gegen eine triviale Lösung zusammenhängt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem linearen und nichtlinearen Fall ist<sup>1</sup>, daß im linearen Fall die Lösungen zu *beliebigen* Anfangsbedingungen gegen eine (*die*) a-priori bekannte stationäre Lösung konvergieren. Im nichtlinearen System (P) konvergieren nur Lösungen zu geeigneten kleinen Anfangsbedingungen, bei denen eben keine Phasenübergänge stattfinden, gegen eine triviale Lösung. Ferner wird dazu im linearen Fall keine Grenzflächenenergie benötigt, im nichtlinearen System (P) dagegen ist gerade interessant, wie die Grenzflächenenergie auch bei an sich bereits kritischen Anfangsbedingungen mit  $-\mu\pi^2 < \sigma_\varepsilon < 0$  für die Konvergenz gegen eine triviale stationäre Lösung sorgt.

## 4.1 Linearisierung um eine triviale stationäre Lösung

Es sei  $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \epsilon$ ,  $\theta = \bar{\theta} + \vartheta$ , und wir entwickeln  $\Psi(\varepsilon + l, \theta)$  um  $(\bar{\varepsilon} + l, \bar{\theta})$ , also

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon + l, \theta) &= \Psi(\bar{\varepsilon} + l, \bar{\theta}) + \sigma(\bar{\varepsilon} + l, \bar{\theta})\epsilon + \Psi_\theta(\bar{\varepsilon} + l, \bar{\theta})\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon(\bar{\varepsilon} + l, \bar{\theta})\epsilon^2 + \sigma_\theta(\bar{\varepsilon} + l, \bar{\theta})\epsilon\vartheta + \frac{1}{2}\Psi_{\theta\theta}(\bar{\varepsilon} + l, \bar{\theta})\vartheta^2 \\ &\quad + \mathcal{O}((\epsilon + \vartheta)^3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Im weiteren verwenden wir (unter Beachtung von  $\bar{\varepsilon} \equiv 0$ , da wir eine triviale stationäre Lösung betrachten) die Abkürzungen

$$a_0 = \sigma_\varepsilon(l, \bar{\theta}), \quad b_0 = \sigma_\theta(l, \bar{\theta}), \quad c_0 = -\Psi_{\theta\theta}(l, \bar{\theta}) \quad \text{und} \quad d_0 = \frac{\kappa}{\bar{\theta}}, \quad (4.3)$$

wobei wegen (H3) stets  $c_0 \geq \bar{C}_1 > 0$  gilt, sowie natürlich  $d_0 > 0$ . Setzen wir nun  $u = \bar{u} + v$  und  $\theta = \bar{\theta} + \vartheta$  in (P) ein und behalten nur die Terme erster Ordnung in  $v$  und  $\vartheta$ , so erhalten wir unter Verwendung von (4.2) und (4.3) das lineare System

$$v_{tt} = a_0 v_{xx} + b_0 \vartheta_x - \mu v_{xxxx} + \gamma v_{xxt}, \quad (4.4a)$$

$$c_0 \vartheta_t = d_0 \vartheta_{xx} + b_0 v_{xt}. \quad (4.4b)$$

Mit dem üblichen Separationsansatz

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \operatorname{Re}(g(t)e^{i\alpha x}) \\ \vartheta(t, x) &= \operatorname{Re}(h(t)e^{i\alpha x}) \end{aligned} \quad g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

folgen die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} g'' &= -\alpha^2 a_0 g + i\alpha b_0 h - \mu\alpha^4 g - \gamma\alpha^2 g', \\ c_0 h' &= -d_0 \alpha^2 g + i\alpha b_0 h', \end{aligned}$$

die wir als Sytem 1.Ordnung schreiben,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g \\ g' \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 a_0 - \mu\alpha^4 & -\gamma\alpha^2 & i\alpha b_0 \\ 0 & \frac{i\alpha b_0}{c_0} & -\frac{\alpha^2 d_0}{c_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ g' \\ h \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>wenn wir uns zur Einfachheit der Beschreibung auf  $\dot{l} \equiv 0$  einschränken

mit charakteristischem Polynom

$$P_\alpha(\lambda) = \lambda^3 + \alpha^2\left(\gamma + \frac{d_0}{c_0}\right)\lambda^2 + \alpha^2\left(\frac{\alpha^2\gamma d_0}{c_0} + a_0 + \mu\alpha^2 + \frac{b_0^2}{c_0}\right)\lambda + \frac{\alpha^4(a_0 + \mu\alpha^2)d_0}{\theta}.$$

Für die Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $P_\alpha(\lambda) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$  gilt nach dem Hurwitz-Kriterium

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \Leftrightarrow c_2, c_1, c_0, c_1c_2 - c_0 \geq 0.$$

Hier haben wir:

$$\begin{aligned} (1) \quad c_2 \geq 0 &\Leftrightarrow \alpha^2\left(\gamma + \frac{d_0}{c_0}\right) \geq 0, \\ (2) \quad c_1 \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\alpha^2\gamma d_0}{c_0} + \mu\alpha^2 + \frac{b_0^2}{c_0} \geq -a_0, \\ (3) \quad c_0 \geq 0 &\Leftrightarrow \alpha^2\mu \geq -a_0, \\ (4) \quad c_1c_2 - c_0 \geq 0 &\Leftrightarrow \alpha^4\left(\gamma + \frac{d_0}{c_0}\right)\left(\frac{\alpha^2\gamma d_0}{c_0} + \frac{b_0^2}{c_0}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

und die Bedingungen (1) und (4) sind auf Grund unserer konstitutiven Bedingungen  $c_0, d_0 > 0$  stets erfüllt. Bedingung (3) ist schärfer als Bedingung (2), so daß wir schließlich erhalten:

$$\pi^2\mu \stackrel{!}{\geq} -a_0 = -\sigma_\varepsilon(l, \bar{\theta}). \quad (4.5)$$

Dabei wurde verwendet, daß wir zu  $\alpha = 0$  zwar einen dreifachen Null-Eigenwert erhalten, konstante Verschiebungen aber wegen den Randbedingungen nur in  $\theta$  zulässig sind. Nach (4.5) ist  $(0, \bar{\theta})$  nun linear instabil im Fall  $\sigma_\varepsilon(l, \bar{\theta}) < -\mu\pi^2$ , und man beachte, daß diese lineare Instabilität unabhängig ist von  $\gamma, b_0, c_0$  und  $d_0$ . Auf der anderen Seite können wir aus  $\sigma_\varepsilon(l, \bar{\theta}) > -\mu\pi^2$  nicht mittels linearisierter Stabilitätsanalyse die exponentielle Stabilität der trivialen stationären Lösung  $(0, \bar{\theta})$  folgern, da wir stets besagten zu konstanten Verschiebungen der Temperatur gehörigen Nulleigenwert haben.

Die stattdessen verwendete Methode von a-priori Abschätzungen stellen wir im nächsten Abschnitt am linearen System (4.4) mit  $\mu = 0$  vor. Zum Abschluß dieses Abschnitts berechnen wir noch die zu (4.4) gehörige „linearisierte“ innere Energie. Diese erhalten wir, indem wir in  $E^{(i)}$  die Entwicklung von  $\Psi$  bis zu Termen zweiter Ordnung einsetzen. Setzen wir dabei als weitere Abkürzungen  $\bar{\Psi} = \Psi(l, \bar{\theta})$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma(l, \bar{\theta})$  usw., so erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{\text{lin}}^{(i)}(\varepsilon, u_t, \theta) &:= \int_0^1 \frac{1}{2}u_t^2 + (\bar{\Psi} + \bar{\sigma}\varepsilon + \bar{\Psi}_\theta\vartheta + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_\varepsilon\varepsilon^2 + \bar{\sigma}_\theta\varepsilon\vartheta + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{\theta\theta}\vartheta^2) \\ &\quad - (\bar{\theta} + \vartheta)(\bar{\Psi}_\theta + \bar{\sigma}_\theta\varepsilon + \bar{\Psi}_{\theta\theta}\vartheta) + \frac{\mu}{2}\varepsilon_x^2 dx \\ &= \bar{\Psi} + \int_0^1 \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{\mu}{2}\varepsilon_x^2 dx \\ &\quad + (\bar{\sigma} - \bar{\theta}\bar{\sigma}_\theta) \int_0^1 \varepsilon dx + (\bar{\Psi}_\theta - \bar{\Psi}_\theta - \bar{\theta}\bar{\Psi}_{\theta\theta}) \int_0^1 \vartheta dx \\ &\quad + \int_0^1 \frac{a_0}{2}\varepsilon^2 + \bar{\sigma}\varepsilon\vartheta - \frac{c_0}{2}\vartheta^2 - \vartheta(\bar{\sigma}\varepsilon - c_0\vartheta) dx \\ &= \bar{\Psi} - \bar{\theta}\bar{\Psi}_{\theta\theta} \int_0^1 \vartheta dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u_t^2 + a_0\varepsilon^2 + c_0\vartheta^2 + \mu\varepsilon_x^2 dx. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß für uns die beiden ersten Terme der letzten Zeile keine Rolle spielen, und wir sie deshalb weglassen können.

## 4.2 Bemerkungen zum klassischen linearen Fall

### 4.2.1 Linearisierte Thermoelastizität

Unter Verwendung von nun wieder  $u$  und  $\theta$  notieren wir (4.4) mit  $\mu = \gamma = 0$  zu

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a_0 u_{xx} + b_0 \theta_x \\ c_0 \theta_t &= d_0 \theta_{xx} + b_0 u_{xt}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dabei setzen wir im weiteren  $a_0, c_0, d_0 > 0$  und  $b_0 \neq 0$  voraus. Man beachte, daß für lineare Materialien normalerweise ein Zusammenziehen ( $u_{xt} < 0$ ) zu einer Erwärmung ( $\theta_t > 0$ ) und eine Ausdehnung ( $u_{xt} > 0$ ) zu einer Abkühlung ( $\theta_t < 0$ ) führt, und deshalb typischerweise  $b_0 > 0$  gilt. Für die Abschätzungen in diesem Kapitel spielt das jedoch das Vorzeichen von  $b_0 \neq 0$  keine Rolle, und auf Grund unserer speziellen freien Energie  $\Psi$  gilt

$$\sigma_\theta(u_x + l, \theta) = \Psi'_1(u_x + l) \begin{cases} > 0 \text{ für } u_x + l > 0 \\ = 0 \text{ für } u_x + l = 0 \\ < 0 \text{ für } u_x + l < 0 \end{cases} \quad \text{nach (H4)}. \quad (4.8)$$

Den Fall  $\sigma_\theta = 0$  werden wir bei der Übertragung der in Unterabschnitt 4.2.2 verwendeten Methode auf den  $(P_0)$  berücksichtigen müssen. Auf die natürlich mögliche Übernahme des Term  $-\mu u_{xxxx}$  haben wir verzichtet, da dieser im linearen Fall keine wesentliche Rolle spielt. Die Randbedingungen sind (da wir  $\dot{l} \equiv 0$  betrachten !)

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \text{ und } \theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0, \quad (4.9)$$

und diese Dirichletrandbedingungen in  $u$  und Neumannrandbedingungen in  $\theta$  werden wir wieder durch die Schreibweisen  $u \in H_D^k(0, 1)$  und  $\theta \in H_N^j(0, 1)$  ausdrücken. Man beachte, daß in diesem Abschnitt  $\theta$  gemäß der Herleitung von (4.4) die Temperaturdifferenz zu einer Referenztemperatur bezeichnet, und eine Substitution  $\tilde{\theta} = \theta - \text{const}$  das lineare System (4.7) nicht verändert. Ferner ist die Durchschnittstemperatur  $\theta_a(t) := \int_0^1 \theta(t, x) dx$  im linearen System mit unseren Randbedingungen eine Erhaltungsgröße, denn

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \theta(t, x) dx = \int_0^1 \frac{1}{c_0} (d_0 \theta_{xx} + b_0 u_{tx}) dx = \left[ \frac{d_0}{c_0} \theta_x + \frac{b_0}{c_0} u_t \right]_0^1 = 0, \quad (4.10)$$

und deshalb werden wir in diesem Unterabschnitt stets oBdA  $\theta_a \equiv 0$  betrachten. Bei Weglassens der Normierung  $\tilde{\Psi}$  ist damit die linearisierte innere Energie aus (4.6) schließlich gegeben durch

$$E_{\text{lin}}^{(i)}(u_x, u_t, \theta) := \frac{1}{2} \int_0^1 u_t^2 + a_0 u_x^2 + c_0 \theta^2 dx, \quad (4.11)$$

wobei nun einfache Rechnung mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{lin}}^{(i)} &= \int_0^1 u_t u_{tt} + a_0 u_x u_{tx} + \theta c_0 \theta_t dx \\ &= \int_0^1 u_t (a_0 u_{xx} + b_0 \theta_x) + a_0 u_x u_{tx} + \theta (d_0 \theta_{xx} + b_0 u_{tx}) dx = -d_0 \int_0^1 \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

ergibt. Dies zeigt, daß die Linearisierung die Erhaltung der inneren Energie aus (2.24) zerstört hat und die thermische Dissipation jetzt statt zu einem Anstieg der Entropie direkt zu einem Abfall der Energie  $E_{\text{lin}}^{(i)}$  führt, und es wird im weiteren darum gehen, hieraus (sowie später auch aus der viskosen Dämpfung) die Konvergenz von Lösungen gegen eine triviale stationäre Lösung erhalten. Dies führen wir in diesem Abschnitt linear vor, und für den nichtlinearen Fall wird es darum gehen, zu zeigen, daß für kleine Verzerrungen (in geeigneten Bereichen) die linearen Terme entsprechend dominieren. Zunächst erhalten wir aus der Halbgruppentheorie unmittelbar den folgenden sehr einfachen Existenzsatz und Eindeutigkeitssatz für (4.7).

**Satz 4.1** *Es seien  $u_0 \in H_D^2(0, 1)$ ,  $u_1 \in H_D^1(0, 1)$  und  $\theta_0 \in H_{N,a}^2(0, 1)$ . Dann existiert zu diesen Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung  $(u, \theta)$  für (4.7), (4.9) mit*

$$u \in C([0, \infty); H_D^2(0, 1)) \cap C^1([0, \infty); H_D^1(0, 1)) \cap C^2([0, \infty); L^2(0, 1)), \quad (4.12)$$

$$\theta \in C([0, \infty); H_{N,a}^2(0, 1)) \cap C^1([0, \infty); L_a^2(0, 1)), \quad (4.13)$$

so daß (4.7) gilt als Gleichheit in  $L^2(0, 1)$ .

**Beweis.** Wir setzen  $v = (v_1, v_2, v_3) = (u_x, u_t, \theta)$  und schreiben 4.7 als lineare Evolutionsgleichung erster Ordnung,

$$\begin{aligned} v_t &= Av, \\ v_0 &= (\partial_x u_0, u_1, \theta_0), \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & 0 \\ a_0 \partial_x & 0 & b_0 \partial_x \\ 0 & \frac{b_0}{c_0} \partial_x & \frac{d_0}{c_0} \partial_x^2 \end{pmatrix}$$

Ferner sei  $H = L_a^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_a^2(0, 1)$  mit Skalarprodukt

$$(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_1 v_1 + u_2 v_2 + c_0 u_3 v_3 dx.$$

Mit  $D(A) = H_a^1(0, 1) \times H_D^1(0, 1) \times H_{N,a}^2(0, 1)$  ist  $\overline{D(A)} = H$ . Ferner ist  $A$  abgeschlossen und dissipativ, denn mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} (Av, v) &= \int_0^1 \partial_x v_2 v_1 + (a_0 \partial_x v_1 + b_0 \partial_x v_3) v_2 + c_0 \left( \frac{d_0}{c_0} \partial_x^2 v_3 + \frac{b_0}{c_0} \partial_x v_2 \right) v_3 dx \\ &= -d_0 \int_0^1 (\partial_x v_3)^2 dx \leq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Der adjungierte Operator  $A^*$  ergibt sich zu

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \partial_x & 0 \\ -\partial_x & 0 & -\frac{b_0}{c_0} \partial_x \\ 0 & -b_0 \partial_x & \frac{d_0}{b_0} \partial_x^2 \end{pmatrix}$$

und die adjungierten Randbedingungen ergeben nach Definition der Randoperatoren

$$(B_1 u, v) = \int_0^1 u_2 v_2 dx = (u, B_1 v)$$



für die  $u_t$  Randbedingung und

$$(B_2 u, v) = \int_0^1 \partial_x u_3 v_3 dx = - \int_0^1 u_3 \partial_x v_3 dx = (u, B_2^* v)$$

für die  $\theta_x$  Randbedingung zu

$$u_t(t, 0) = u_t(t, 1) = 0 \text{ und } -\theta_x(t, 0) = -\theta_x(t, 1) = 0.$$

Damit gilt  $D(A^*) = D(A)$ , und es ist  $A^*$  offensichtlich ebenfalls dissipativ. Mit Satz A.8 folgt, daß  $A$  infinitesimaler Generator einer  $C_0$  Halbgruppe von Kontraktionen auf  $H$  ist. Damit erhalten wir

$$u_x \in C([0, \infty); H_a^1(0, 1)), u_t \in C([0, \infty); H_D^1(0, 1)), \theta \in C([0, \infty); H_{N,a}^2(0, 1)).$$

Mit (A.4) erhalten wir schließlich (4.12) und (4.13).  $\square$

Im Rest dieses Unterabschnitts folgen wir [Han92], setzen<sup>2</sup>  $c_0 = a_0 = d_0 = 1$ , und zeigen, wie wir mit linearisierter Stabilitätsanalyse die exponentielle Konvergenz von  $(u_x, u_t, \theta)$  gegen  $(0, 0, 0)$  in  $H$  erhalten. Dies ist hier möglich, da wir wegen (4.10) den störenden Nulleigenwert zu konstanten  $\theta$ -Verschiebungen ausschließen können, was wir in der Definition von  $H$  durch den Ansatz  $\theta \in L_a^2(0, 1)$  berücksichtigt haben. Im nichtlinearen Problem (P) jedoch ist  $\theta_a$  auch für  $\dot{l} \equiv 0$  i.a. keine Erhaltungsgröße mehr, und die Eigenschaften des Systems hängen entscheidend von  $\theta$  ab. Um Stabilität stationärer Lösungen im nichtlinearen Fall nachzuweisen, muß deshalb die folgende linearisierte Stabilitätsanalyse versagen, wie immer, wenn der Linearteil eines nichtlinearen Systems einen Nulleigenwert besitzt.

Zunächst zeigt nun [Han92], daß  $H$  eine Basis aus Eigenfunktionen von  $A$  hat, indem er ausgeht von der Ortonormalbasis

$$E_1^k = \begin{pmatrix} \cos k\pi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2^k = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin k\pi x \\ 0 \end{pmatrix}, E_3^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos k\pi x \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

Setzen wir  $\Sigma_k = \text{diag}(\cos k\pi x, -\sin k\pi x, \cos k\pi x)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , so gilt

$$A\Sigma_k y = k\pi\Sigma_k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b_0 \\ 0 & -b_0 & -k\pi \end{pmatrix} y =: k\pi\Sigma_k R_k y, \quad (4.17)$$

sodaß  $\Sigma_k y$  genau dann Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $k\pi\lambda$  ist, wenn  $y$  Eigenvektor von  $R_k$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist. Als charakteristische Gleichung von  $R_k$  erhalten wir

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda + k\pi) + b_0^2 \lambda = 0, \quad (4.18)$$

und [Han92] zeigt, daß (4.18) für alle  $k$  eine reelle Nullstelle  $\lambda_k$  und ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen  $\sigma_k, \bar{\sigma}_k$  besitzt, wobei gilt

$$\lambda_k - k\pi \rightarrow 0 \text{ und } \sigma_k \rightarrow i\pi \text{ für } k \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

---

<sup>2</sup>um die Darstellung nicht unnötig mit Konstanten zu belasten

Genauer gilt für die entsprechenden Eigenwerte  $\lambda_k^* = k\pi\lambda_k$  und  $\sigma_k^* = k\pi\sigma_k$  von  $A$  folgende asymptotische Entwicklung ([Han92], Proposition 4.3):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k^* &= -k^2\pi^2 + b_0^2 + \mathcal{O}(k^{-1}) \text{ für } k \rightarrow \infty \\ \sigma_k^* &= ik\pi - \frac{b_0^2}{2} + \frac{1}{k\pi}ib_0^2(1 - b_0^2/2) + \mathcal{O}(k^{-2}) \end{aligned} \right\} \text{ für } k \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Die Basis von Eigenfunktionen von  $A$  ergibt sich nun, indem wir die  $R_k$  mittels der Matrizen  $M_k = (y_{\sigma_k}, y_{\bar{\sigma}_k}, y_{\lambda_k})$  der zugehörigen Eigenvektoren diagonalisieren,  $M_k^{-1}R_kM_k = \text{diag}(\sigma_k, \bar{\sigma}_k, \lambda_k)$ . Wegen (4.19) gilt dabei

$$\det M_k \rightarrow -2i \quad \text{und} \quad \sup_{i,j,k} |(M_k)_{i,j}| < \infty,$$

und damit folgt (Lemma A.6), daß die Eigenfunktionen  $(\Sigma_k y_{\sigma_k}) \cup (\Sigma_k y_{\bar{\sigma}_k}) \cup (\Sigma_k y_{\lambda_k})$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) mit

$$(\Sigma_k y_{\sigma_k}, \Sigma_k y_{\bar{\sigma}_k}, \Sigma_k y_{\lambda_k}) = M_k \left( E_1^k, E_2^k, E_3^k \right)$$

eine Basis von  $H$  von Eigenfunktionen von  $A$  bilden. Für

$$\nu := \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

gilt wegen (4.15)  $\nu \leq 0$  und aus (4.20) erhalten wir  $\nu < 0$ . Es sei jetzt  $(\phi_k)_{k=1,2,\dots}$  obige Basis von Eigenfunktionen und  $v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k \in H$ . Dann folgt die behauptete exponentielle Stabilität mittels

$$S(t)v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t} \phi_k = e^{-\nu t} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{(\lambda_k + \nu)t} \phi_k, \quad (4.21)$$

denn mit  $|c_k e^{\lambda_k + \nu t}| \leq |c_k|$  folgt  $S(t)f = e^{-\nu t} q(t)$ , wobei  $\|q(t)\|_H \leq C\|f\|_H \forall t \geq 0$ , und damit

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq C e^{-\nu t}. \quad (4.22)$$

**Bemerkung 4.1** Der Identität (4.21) liegt die wohlbekanntete Tatsache zugrunde, daß die Lösung von (4.14) gegeben ist durch  $v(t) = e^{tA}v_0$ , wenn man  $e^{tA}$  geeignet definiert. Dabei ist die heuristische Definition  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$  sinnlos, da Konvergenz der rechten Seite voraussetzt, daß  $A$  ein beschränkter Operator ist. Mit unserer Diagonalisierung

$$A = k\pi \begin{pmatrix} M_1^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & M_2^{-1} & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \lambda_1, \sigma_2, \dots) \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots \\ 0 & M_2 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

können wir jedoch  $e^{tA}$  definieren als

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & 0 & \dots \\ 0 & M_2^{-1} & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \text{diag}(e^{\sigma_1^* t}, e^{\bar{\sigma}_1^* t}, e^{\lambda_1^* t}, e^{\sigma_2^* t}, \dots) \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots \\ 0 & M_2 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

und erhalten damit (4.21) in Analogie zu  $v(t) = e^{tA}v_0$  als Darstellung in  $H$  bzgl der Basis  $(\phi_k)_{k=1,2,\dots}$   $\square$

### 4.2.2 Energieabschätzungen höherer Ordnung, linear

In diesem Abschnitt zeigen wir mittels Energieabschätzungen höherer Ordnung die exponentielle Konvergenz von  $(u, u_t, u_{tt})$  in  $H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  gegen  $(0, 0, 0)$  und von  $(\theta, \theta_t)$  in  $H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  gegen die stationäre Lösung  $(\theta_a, 0)$ , wobei  $\theta_a := \int_0^1 \theta dx$ . Da wir damit die aus [Sle81] entnommene Methode vorstellen wollen, mit der wir auch im nichtlinearen Fall vorgehen werden, fordern wir dabei nicht mehr notwendig  $\theta_a = 0$ . Der Einfachheit halber setzen wir weiterhin  $c_0 = a_0 = d_0 = 1$  und verwenden ferner die Poincaré Ungleichungen (A.1) und (A.2) ohne den Faktor  $\frac{1}{\pi^2}$ , der in diesem Abschnitt keine Rolle spielt.

Die linearisierte innere Energie  $E_{\text{lin}}^{(i)}$  aus (4.11) bezeichnen wir nun als Energie nullter Ordnung,

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 u_t^2 + u_x^2 + \theta^2 dx,$$

und definieren die beiden folgenden Energiefunktionale erster Ordnung

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \int_0^1 u_{tx}^2 + u_{xx}^2 + \theta_x^2 dx, \\ E_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 u_{tt}^2 + u_{tx}^2 + \theta_t^2 dx. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Weiter benötigen wir das Hilfsfunktional

$$F_1 = \int_0^1 u_t u_{tt} dx,$$

und definieren die Gesamtenergie

$$E = E_1 + E_2 - \eta F_1$$

mit einem noch zu bestimmenden  $0 < \eta < 1$ , sodaß  $E$  zum einen äquivalent ist zu der im folgenden Satz definierten Halbnorm, zum zweiten eine Ungleichung der Form

$$E(t) \leq E(0)e^{-\nu t} \tag{4.24}$$

gilt. Damit wird die behauptete exponentielle Konvergenz folgen. Man beachte, daß wir im folgenden Satz explizit die Mittelwerte für  $\theta$  weglassen (sodaß wir eigentlich auch Satz 4.1 noch einmal ohne die Indizes  $a$  für den  $\theta$ -Raum formulieren müßten).

**Satz 4.2** *Es seien  $u_0 \in H_D^2(0, 1)$ ,  $u_1 \in H_D^1(0, 1)$  und  $\theta_0 \in H_N^2(0, 1)$ . Für  $(u, \theta) = (u, u_t, u_{tt}, \theta, \theta_t)$  aus dem Hilbertraum*

$$H := H_D^2(0, 1) \times H_D^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_N^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

definieren wir die Halbnorm  $|(u, \theta)|_2$  durch

$$|(u, \theta)|_2^2 := \|u\|_{H^2}^2 + \|u_t\|_{H^1}^2 + \|u_{tt}\|_{L^2}^2 + \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|\theta_t\|_{L^2}^2.$$

Dann gilt für die Lösung  $(u, \theta)$  von (4.7), aus Satz 4.1 und ein  $\nu > 0$  die Ungleichung

$$|(u, \theta)|_2^2 \leq C e^{-\nu t} |(u, \theta)_{t=0}|_2^2, \tag{4.25}$$

wobei  $\partial_t^2 u_0$  und  $\partial_t \theta_0$  formal gegeben sind durch (4.7), d.h.  $\partial_t^2 u_0 = \partial_x^2 u_0 + b_0 \partial_x \theta_0$  und  $\partial_t \theta_0 = \partial_x^2 \theta_0 + b_0 \partial_x u_1$ .

**Beweis.** Um (4.25) aus (4.24) zu erhalten, ist zunächst zu zeigen, daß  $E$  auf  $H$  eine zu  $|(\cdot, \cdot)|_2^2$  äquivalente Halbnorm darstellt. Mit der Poincaré Ungleichung (A.2) erhalten wir

$$\frac{1}{3} \int_0^1 u_x^2 dx \leq \frac{1}{3} \left( \int_0^1 u_x dx \right)^2 + \frac{1}{3} \int_0^1 u_{xx}^2 dx \stackrel{RB}{=} \frac{1}{3} \int_0^1 u_{xx}^2 dx,$$

und mit (A.1)  $\frac{1}{6} \int_0^1 u^2 dx \leq \frac{1}{6} \int_0^1 u_x^2 dx$ , zusammen also

$$\frac{1}{6} \int_0^1 u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 u_{xx}^2 dx.$$

Ebenso erhalten wir  $\frac{1}{2} \int_0^1 u_t^2 + u_{tx}^2 dx \leq \int_0^1 u_{tx}^2 dx$  und wegen  $\eta|u_t u_{tt}| \leq \eta/2(u_t^2 + u_{tt}^2)$  erhalten wir schließlich

$$E \geq \frac{1}{2} \int_0^1 u_{tx}^2 + (1 - \eta)u_t^2 + \frac{1}{3}(u_{xx}^2 + u_x^2 + u^2) + \theta_x^2 + \theta_t^2 + (1 - \eta)u_{tt}^2 dx.$$

Für  $\eta < 1$  folgt also  $|(u, \theta)|_2^2 \leq C(\eta)E$ , und für  $\eta = \eta_1 \leq \frac{1}{2}$  erhalten wir konkret  $|(u, \theta)|_2^2 \leq 6E$ . Wiederum mit  $\eta|u_t u_{tt}| \leq \eta/2(u_t^2 + u_{tt}^2)$  folgt die umgekehrte Richtung  $E \leq |(u, \theta)|_2^2$  für  $\eta < 1$ . Wenn wir (4.24) gezeigt haben, folgt dann

$$|(u, \theta)|_2^2 \leq 6E(t) \leq 6E(0)e^{-\nu t} \leq 6|(u, \theta)_{t=0}|_2^2 e^{-\nu t}$$

und damit die Behauptung. Um nun (4.24) zu erhalten, differenzieren wir  $E$  aus und erhalten durch Einsetzen von (4.7) und partielle Integration

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \int_0^1 u_{tx}(u_{xx} + b_0\theta_x)_x + u_{xx}u_{xxt} + \theta_x(\theta_{xx} + b_0u_{tx})_x dx \\ &= [u_{tx} \underbrace{(u_{xx} + b_0\theta_x)}_{=u_{tt}=0}]_0^1 - \int_0^1 u_{txx}(u_{xx} + b_0\theta_x) dx \\ &\quad + \int_0^1 u_{xx}u_{txx} + b_0\theta_x u_{txx} dx + \underbrace{[\theta_x \theta_{xx}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx \\ &= - \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \int_0^1 u_{tt}(u_{xx} + b_0\theta_{xt})_t + u_{tx}u_{ttx} + \theta_t(\theta_{xx} + b_0u_{tx})_t dx \\ &= - \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 &= \int_0^1 u_{tt}^2 + u_t(u_{xxt} + b_0\theta_{tx}) dx \\ &= \int_0^1 u_{tt}^2 - u_{tx}^2 + b_0u_t\theta_{tx} dx. \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.2** Dieses Differenzieren von  $E$  ist formal eigentlich nicht erlaubt, d.h. es treten Terme wie  $u_{txx}, u_{ttx}, \theta_{tx}$  auf, die nicht existieren, solange unsere Lösung  $(u, \theta)$  nur stetig abbildet in den Raum  $H$ . Man beachte jedoch, daß in  $E$  selber und damit in der gesuchten Abschätzung (4.24) nur wohldefinierte Terme auftreten. Wir rechtfertigen unser Vorgehen, indem wir zunächst annehmen, daß  $u$  und  $\theta$  die benötigte zusätzliche Glattheit besitzen, und zeigen (4.24) für diesen Fall. Für  $u$  und  $\theta$  aus dem in Satz 4.1 gegebenen Raum folgt dann (4.24) mit dem üblichen Dichtheitsargument.  $\square$

Aus  $\dot{E}_1$  haben wir nun einen  $-\theta_{xx}^2$  Term, aus  $\dot{E}_2$  einen  $-\theta_{tx}^2$  Term und aus  $\dot{F}_1$  einen  $-\eta u_{tt}^2$  Term. Die Idee ist, ebensolche negativ definiten Terme in  $\theta_t^2$ , in  $u_{xx}^2$  sowie in  $u_{tx}^2$  zu erzeugen. Man beachte, daß wir insbesondere den letzten Term auf Grund des hyperbolischen Charakter der Impulsbilanz niemals direkt durch differenzieren eines Energieausdrucks wie z.B.  $E_1$  oder auch eines Ausdrucks der Form wie  $F_1$  erhalten können.

Wir beginnen mit dem  $-\theta_t^2$  Term, wobei wir wieder (A.2) verwenden. Es gilt

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx \leq \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \theta_t dx \right)^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \theta_t^2 dx \stackrel{(4.10)}{=} -\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_t^2 dx \quad (4.26)$$

Auch in diese Abschätzung geht also wesentlich ein, daß  $\int_0^1 \theta dx$  eine Erhaltungsgröße ist. Wir werden jedoch Abschnitt 4.3 sehen, daß wir auch im nichtlinearen Fall den Term  $(\int_0^1 \theta_t dx)^2$  geeignet abschätzen können.

Als nächstes erzeugen wir negativ definite Terme in  $u_{tx}^2$  und  $u_{xx}^2$ . Wir bemerken zunächst  $-\int_0^1 \theta_{xx}^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx$  nach (A.1), und verwenden im weiteren die aus [Sle81] entnommene Ungleichung

$$(x_1 + x_2)^2 + \alpha x_1^2 \geq \alpha \frac{1+\alpha}{2+\alpha} x_1^2 + \frac{\alpha}{2+2\alpha} x_2^2 \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad (4.27)$$

**Beweis der Ungleichung:** Die Aussage ist äquivalent zur positiven Semidefinitheit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha \frac{1+\alpha}{2+\alpha} + \alpha & 1 \\ 1 & 1 - \frac{\alpha}{2+2\alpha} \end{pmatrix},$$

und  $A$  ist positiv semidefinit wegen  $\det A = \frac{2+2\alpha}{2+\alpha} \frac{2+\alpha}{2+2\alpha} - 1 = 0$  und  $a_{11} = \frac{2+2\alpha}{2+\alpha} > 0$  für  $\alpha > 0$ .  $\square$

Wir erhalten nun

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_t^2 + \theta_{xx}^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_t^2 + (\theta_t - b_0 u_{tx})^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{3} \theta_t^2 + \frac{1}{4} b_0^2 u_{tx}^2 dx \quad (4.28)$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_x^2 + \eta u_{tt}^2 dx &= -\frac{\eta}{2} \int_0^1 \frac{1}{\eta b_0^2} b_0^2 \theta_x^2 + (u_{xx} + b_0 \theta_x)^2 dx \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta b_0^2 + 1}{2\eta b_0^2 + 1} \theta_x^2 + \frac{\eta}{2(\eta b_0^2 + 1)} u_{xx}^2 dx \\ &\leq -\frac{1}{4} \int_0^1 \theta_x^2 + \frac{\eta}{\eta b_0^2 + 1} u_{xx}^2 dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Man beachte insbesondere, daß wir in (4.28) die negativ definiten Terme in  $u_t^2$  und  $u_{tx}^2$  unabhängig von  $\eta$  erzeugt haben und damit die aus  $\dot{F}$  stammenden positiven bzw. indefiniten Terme  $\eta \int_0^1 u_{tx}^2 dx$  und

$$\eta \int_0^1 u_t \theta_{tx} dx \leq \frac{\eta}{2} \int_0^1 u_t^2 + \theta_{tx}^2 dx$$

kontrollieren können. Insgesamt erhalten wir

$$\dot{E} \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} \theta_x^2 + \frac{\eta}{\eta b_0^2 + 1} u_{xx}^2 + \frac{2}{3} \theta_t^2 + \left( \frac{b_0^2}{4} - \eta \right) u_{tx}^2 + (1 - \eta) \theta_{tx}^2 + \frac{\eta}{2} u_{tt}^2 dx,$$

und wegen

$$-\frac{\nu}{2} \int_0^1 \theta_x^2 + u_{xx}^2 + \theta_t^2 + (2 + \eta) u_{tx}^2 + (1 + \eta) u_{tt}^2 dx \leq -\nu E$$

wählen wir nun  $0 < \eta < \eta_1 = \frac{1}{2}$  so, daß

$$\nu = \min \left\{ \frac{\eta}{\eta b_0^2 + 1}, \frac{b_0^2 - 4\eta}{4(2 + \eta)}, \frac{\eta}{2(1 + \eta)} \right\} \quad (4.30)$$

maximal wird, und erhalten  $\dot{E} \leq -\nu E$ . Mit der Gronwallschen Ungleichung erhalten wir (4.24) und damit

$$|(u, \theta)|_2^2 \leq 6E(t) \leq 6E(0)e^{-\nu t} \leq 6|(u, \theta)_{t=0}|_2^2 e^{-\nu t},$$

was zu zeigen war, wobei mit  $\|\theta_x\|_{L^2}^2$ ,  $\|\theta_t\|_{L^2}^2 \xrightarrow{exp} 0$  und  $\frac{d}{dt} \int_0^1 \theta dx = 0$  auch wieder  $\|\theta - \theta_a\|_{H^1} \xrightarrow{exp} 0$  folgt.  $\square$

**Bemerkung 4.3** Es sei bemerkt, daß die Wahl von  $\eta$  in Abhängigkeit von  $b_0$  noch optimiert werden kann, sodaß wir ein möglichst großes  $\nu$  erhalten, indem die negativ definiten Terme  $-\theta_{xx}^2$  und  $-\theta_{tx}^2$  besser zur Erzeugung der anderen negativ definiten Terme verteilt werden. Hier sollte es darum gehen, die Konstanten möglichst einfach und damit das Vorgehen überschaubar zu halten. Eine wichtige Beobachtung aus (4.28), respektive bei Betrachten des zweiten Terms in der Klammer von (4.30) ist jedoch, daß für  $b_0 \rightarrow 0$ , d.h. bei immer schwächer werdender thermisch-mechanischer Kopplung, auch  $\nu$  immer kleiner wird, und von der Ordnung  $b_0^2$  gegen Null geht, womit die Konvergenz immer schlechter wird. Im Grenzfall  $b_0 = 0$  stellt die linearisierte Impulsbilanz bekanntlich einen ungedämpften rein mechanischen Schwinger dar, und für  $\theta$  erhalten wir die Lineare Wärmeleitungsgleichung. In der linearisierten Stabilitätsanalyse in Unterabschnitt 4.2.1 entspricht diesem, daß die Eigenwerte  $\sigma_k^*$  in (4.20) rein imaginär werden zu  $\sigma_k^* = ik\pi$ .

Insgesamt haben wir auf zweierlei Arten gezeigt, wie die thermisch-mechanische Kopplung auch in Abwesenheit von mechanischer Dissipation dafür sorgt, daß die parabolische Gleichung für  $\theta$  die hyperbolische für  $u$  mitdämpft. Im nächsten Unterabschnitt zeigen wir noch, was im linearen thermoviskoelastischen Fall geschieht, und insbesondere, warum wir in diesem Unterabschnitt  $\dot{l} \equiv 0$  gefordert haben, bevor wir auf unser nichtlineares Problem zurückkommen.  $\square$

### 4.2.3 Linearisierte Thermoviskoelastizität

Für den viskosen Fall setzen wir nun nicht mehr  $\dot{l} \equiv 0$  voraus, jedoch der Einfachheit halber weiterhin  $c_0 = a_0 = d_0 = 1$ , und erhalten die Gleichungen der linearisierten Thermoviskoelastizität zuzüglich Randbedingungen zu

$$u_{tt} = u_{xx} - x\ddot{l} + b_0\theta_x + \gamma u_{txx} \quad (4.31a)$$

$$\theta_t = \theta_{xx} + b_0(u_{xt} + \dot{l})$$

$$u_t(t, 0) = u_t(t, 1) = 0, \quad \theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0. \quad (4.31b)$$

Wir setzen wieder  $v = (v_1, v_2, v_3) = (u_x, u_t, \theta)$  und betrachten (4.31) als nichthomogene und nichtautonome lineare Evolutionsgleichung

$$v_t + Av = (0, -x\ddot{l}, b_0\dot{l})^T \quad (4.32)$$

auf dem Banachraum  $X = L_a^2 \times L^2 \times L^2$ , wobei nun

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x & 0 \\ -\partial_x & -\gamma\partial_x^2 & -b_0\partial_x \\ 0 & -b_0\partial_x & -\partial_x^2 \end{pmatrix}$$

ein sektorieller Operator ist mit Definitionsbereich

$$D(A) = \{v \in H^1 \times H_D^2 \times H_N^2 : \int_0^1 v_1 dx = 0\},$$

denn wir erhalten bei analoger Rechnung wie in (4.16) nun folgende asymptotische Entwicklung der Eigenwerte von  $-A$  für  $k \rightarrow \infty$ , siehe z.B. [Zhe95], Abschnitt 2.3,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{\gamma} + \mathcal{O}(k^{-2}) \\ \lambda_2 &= -\gamma k^2 \pi^2 + \frac{\gamma^{-1} + b_0^2}{\gamma(\gamma-1)} + \mathcal{O}(k^{-2}) \\ \lambda_3 &= -k^2 \pi^2 + \frac{b_0^2}{1-\gamma} + \mathcal{O}(k^{-2}) \end{aligned} \right\} \text{ falls } \gamma \neq 1,$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + \mathcal{O}(k^{-2}) \\ \lambda_2 &= -k^2 \pi^2 - \frac{1}{4} + ib_0 k \pi + \mathcal{O}(k^{-1}) \\ \lambda_3 &= \bar{\lambda}_2 \end{aligned} \right\} \text{ falls } \gamma = 1.$$

Ferner ist die rechte Seite von (4.32) natürlich wieder Hölder-stetig als Abbildung von  $(0, \infty)$  nach  $X$ , und damit erhalten wir nach [Hen81], Theorem 3.2.2 zur Anfangsbedingung  $v_0 = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}) \in X$  die Existenz einer eindeutigen Lösung

$$v \in C([0, \infty); X) \cap C((0, \infty); D(A)) \cap C^1((0, \infty); X)$$

mit der expliziten Darstellung (Variation der Konstanten)

$$v(t) = e^{-At}v_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad (4.33)$$

wobei wir uns  $e^{-At}$  definiert denken wie in Bemerkung 4.1. Dies liefert nun zu Anfangsbedingungen  $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  die Existenz einer eindeutigen Lösung

$$\begin{aligned} u &\in C((0, \infty); H_D^2(0, 1)) \cap C^1((0, \infty); H_D^2(0, 1)) \cap C^2((0, \infty); L^2(0, 1)), \\ \theta &\in C((0, \infty); H_N^2(0, 1)) \cap C^1((0, \infty); L^2(0, 1)), \end{aligned}$$

sodaß (4.31a) erfüllt ist in  $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , und man beachte wieder die Glättung der Anfangsbedingungen.

Wir zeigen nun, was die Energiemethode aus Abschnitt 4.2.2 im viskosen Fall liefert. Differenzieren wir  $E_1, E_2$  aus (4.23), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \int_0^1 u_{tx}(u_{xx} - x\ddot{l} + b_0\theta_x + \gamma u_{txx})_x + u_{xx}u_{txx} + \theta_x(\theta_{xxx} + b_0u_{txx})dx \\ &= [u_{tx} \underbrace{(u_{xx} - x\ddot{l} + b_0\theta_x + \gamma u_{txx})}_{=u_{tt}=0}]_0^1 - \int_0^1 u_{txx}(u_{xx} - x\ddot{l} + b_0\theta_x) - \gamma u_{txx}^2 dx \\ &\quad + [\theta_x \theta_{xx}]_0^1 - \int_0^1 \theta_{xx}^2 dx + \int_0^1 b_0 \theta_x u_{txx} dx \\ &= - \int_0^1 \gamma u_{txx}^2 + \theta_{xx}^2 dx - \int_0^1 x \ddot{l} u_{txx} dx \\ &\leq - \int_0^1 \gamma u_{txx}^2 + \theta_{xx}^2 dx + \tau \int_0^1 u_{txx}^2 dx + \frac{\dot{l}^2}{12\tau} \end{aligned}$$

für ein  $\tau > 0$  unter Verwendung der Youngschen Ungleichung, und weiter

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \int_0^1 u_{tt}(u_{xx} - x\ddot{l} + b_0\theta_x + \gamma u_{txx})_t + u_{tx}u_{ttx} + \theta_t(\theta_{xx} + b_0u_{tx} + b_0\dot{l})_t dx \\ &= [u_{tt}(u_{tx} + \gamma u_{ttx})]_0^1 - \int_0^1 u_{ttx}u_{tx} + \gamma u_{ttx}^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 b_0\theta_{tx}u_{tt} - x\ddot{l}u_{tt} + u_{tx}u_{ttx} dx + [\theta_t(\theta_{tx} + b_0u_{tt})]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \theta_{tx}^2 + b_0\theta_{tx}u_{tt} dx + \int_0^1 b_0\ddot{l}\theta_t dx \\ &= - \int_0^1 \gamma u_{ttx}^2 + \theta_{tx}^2 dx - \int_0^1 x\ddot{l}u_{tt} dx + \int_0^1 b_0\ddot{l}\theta_t dx \\ &\leq - \int_0^1 \gamma u_{ttx}^2 + \theta_{tx}^2 dx + \tau \int_0^1 u_{tt}^2 + \theta_t^2 dx + \frac{1}{4\tau} \left( \frac{1}{3} \ddot{l}^2 + b_0^2 \dot{l}^2 \right). \end{aligned}$$

Zuzüglich zu den negativ definiten Terme in  $\theta_{xx}^2$  und  $\theta_{tx}^2$  erhalten wir also noch solche in  $u_{txx}^2$  und  $u_{ttx}^2$  mit Vorfaktor  $\gamma$ , sowie positiv definite Terme in  $u_{txx}^2$ ,  $u_{tt}^2$  und  $\theta_t^2$  mit Vorfaktor  $\tau$ , den wir noch geeignet wählen können. Dies bedeutet, daß wir bei der Definition von  $E$  auf das Abziehen des Terms  $\eta F_1$  verzichten können, und wir notieren zunächst (wieder in suggestiver Schreibweise, die ausdrücken soll, daß wir



die zur Verfügung stehenden negativ definiten Terme geeignet verteilen müssen)

$$\begin{aligned} -\gamma \int_0^1 u_{txx}^2 dx &\leq -\frac{\gamma}{4} \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \frac{\gamma}{4} \int_0^1 u_{txx}^2 dx - \frac{\gamma}{2} \int_0^1 u_{txx}^2 dx & (4.34) \\ -\gamma \int_0^1 u_{ttx}^2 dx &\leq -2\frac{\gamma}{4} \int_0^1 u_{tt}^2 dx - \frac{\gamma}{2} \int_0^1 u_{tt}^2 dx. \end{aligned}$$

Beim Erzeugen eines  $-\theta_t^2$  Terms bekommen wir nun

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx \leq \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \theta_t dx \right)^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \theta_t^2 dx = \frac{1}{2} b_0^2 \dot{l}^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \theta_t^2 dx$$

da  $\int_0^1 \theta dx$  im Fall  $\dot{l} \neq 0$  nicht mehr konstant ist. Wir wählen nun  $\tau = \min\{\frac{1}{4}, \frac{\gamma}{4}\}$ , sodaß

$$\left(-\frac{1}{4} + \tau\right) \int_0^1 \theta_t^2 dx \leq 0, \quad \left(-\frac{\gamma}{4} + \tau\right) \int_0^1 u_{txx}^2 dx \leq 0, \quad \left(-\frac{\gamma}{4} + \tau\right) \int_0^1 u_{tt}^2 dx \leq 0,$$

und gehen schließlich beim Erzeugen eines  $-u_{xx}^2$  Term folgendermaßen vor: zunächst gilt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_x^2 + \gamma u_{tt}^2 dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{b_0^2} b_0^2 \theta_x^2 + (b_0 \theta_x + (u_{xx} - \ddot{l}x + \gamma u_{txx}))^2 dx \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{b_0^2 + 1}{2b_0^2 + 1} \theta_x^2 dx - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{2b_0^2 + 2} (u_{xx} - x\ddot{l} + \gamma u_{txx})^2 dx}_{\textcircled{1}}. \end{aligned}$$

Den Term  $\textcircled{1}$  schätzen wir dann weiter wie folgt ab: unter Verwendung von (4.27) gilt

$$\textcircled{1} \leq -\frac{1}{4(b_0^2 + 1)} \int_0^1 \alpha_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} (u_{xx} - x\ddot{l})^2 + \underbrace{\left( \frac{\alpha_1}{2 + 2\alpha_1} - \alpha_1 \right)}_{=-\alpha_1 \frac{2\alpha_1 + 1}{2\alpha_1 + 2}} \gamma^2 u_{txx}^2 dx,$$

und aus (4.34) haben wir noch einen  $-\frac{\gamma}{2} \int_0^1 u_{txx}^2 dx$ -Term über. Wir wählen deshalb  $\alpha_1$  so, daß

$$\frac{1}{4(b_0^2 + 1)} \frac{2\alpha_1 + 1}{2\alpha_1 + 2} \alpha_1 \gamma^2 \leq \frac{\gamma}{2},$$

setzen weiter

$$\nu_1 = \frac{\alpha_1}{4(b_0^2 + 1)} \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 2},$$

und erhalten unter nochmaliger Verwendung von (4.27) mit der Einfachheit halber  $\alpha = 1$

$$\textcircled{1} - \frac{\gamma}{2} \int_0^1 u_{txx}^2 dx \leq -\nu_1 \int_0^1 (u_{xx} - x\ddot{l})^2 dx \leq -\frac{2}{3} \nu_1 \int_0^1 u_{xx}^2 dx + \frac{2}{3} \nu_1 \underbrace{\int_0^1 x^2 \dot{l}^2 dx}_{=\dot{l}^2/3}.$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \dot{E} \leq & - \int_0^1 \frac{1}{2} \theta_x^2 + \frac{\gamma}{4} u_{tx}^2 + \frac{\gamma}{4} u_{tt}^2 + \frac{1}{2} \theta_t^2 + \frac{2}{3} \nu_1 u_{xx}^2 dx \\ & + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4\tau} \right) b_0^2 \dot{l}^2 + \left( \frac{2}{9} \nu_1 + \frac{1}{12\tau} \right) \dot{l}^2 + \frac{1}{12\tau} \ddot{l}^2 \end{aligned}$$

Setzen wir nun noch

$$\nu = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\gamma}{4}, \frac{2}{3} \nu_1 \right\},$$

so erhalten wir mittels der Gronwallschen Ungleichung

$$\begin{aligned} E(t) \leq & E(0) e^{-\nu t} \\ & + \int_0^t \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4\tau} \right) b_0^2 \dot{l}^2 + \left( \frac{2}{9} \nu_1 + \frac{1}{12\tau} \right) \dot{l}^2 + \frac{1}{12\tau} \ddot{l}^2 \right) e^{-\nu(t-s)} ds. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Diese Abschätzung liefert uns nun zum einen im Fall  $\dot{l} \equiv 0$  wieder die exponentielle Konvergenz von  $\|u\|_{H^2} + \|u_t\|_{H^1} + \|u_{tt}\|_{L^2} + \|\theta_x\|_{L^2} + \|\theta_t\|_{L^2}$  gegen Null, wobei die auftretenden Konstanten noch in Abhängigkeit von  $\gamma$  und  $b_0$  und unter Verwendung der schärferen Poincaré-Ungleichungen optimiert werden können. Zum zweiten zeigt (4.35), in welchem Sinne wir für  $\dot{l} \neq 0$  (und nach Rücksubstitution von  $u = \tilde{u} + xl$ )  $u(t, x) \approx xl(t)$  erhalten, insbesondere wenn wir annehmen, daß  $\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{\dot{l}}^2$  sehr klein ist, oder sogar auf gewissen Zeitintervallen  $(t_0, t_1)$  ganz verschwindet. Sei dazu wieder  $\theta_a(t) := \int_0^1 \theta(t, x) dx$ . Dann ist nach Poincaré  $\int_0^1 (\theta(t, x) - \theta_a(t))^2 dx \leq \int_0^1 \theta_x^2(t, x) dx$  und damit

$$\|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^2 \times H^1}^2 \leq E(t),$$

sodaß insgesamt

$$\|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^2 \times H^1}^2 \leq E(0) e^{-\nu t} + C \int_0^t (\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{\dot{l}}^2) e^{-\nu(t-s)} dx.$$

Um dabei noch einmal die Bedeutung der Geschwindigkeit, mit der wir ziehen, deutlich zu machen, betrachten wir folgende Skalierung: es sei  $0 < \rho \ll 1$ ,  $\tilde{t} := \rho t$  und  $l(t) := l_\rho(t) := \mathcal{L}(\rho t)$  mit  $\mathcal{L}(\cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ , sodaß  $\dot{l}(t) = \dot{l}_\rho = \rho \mathcal{L}'(\tilde{t})$ ,  $\ddot{l}(t) = \rho^2 \mathcal{L}''(\tilde{t})$  usw. Sei weiter  $C_1 := \max\{|\mathcal{L}'(s)| : 0 \leq s \leq t/\rho\}$ , dann wird (4.35) zu

$$\begin{aligned} \|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^2 \times H^1}^2 & \leq E(t) \leq E(0) e^{-\nu t} + CC_1 \rho^2 \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} d\tau + \mathcal{O}(\rho^4) \\ & \leq E(0) e^{-\nu t} + \underbrace{CC_1}_{=: C_0^2} \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4), \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^2 \times H^1} \leq C_0 \rho + e^{-\frac{\nu}{2} t} \sqrt{E(0)} + \mathcal{O}(\rho^2). \quad (4.36)$$

Die Idee der Abschätzung (4.35) liegt darin, auszunutzen, daß die Energie der Anfangsbedingungen exponentiell fällt, wenn wir nicht ziehen, und die beim Ziehen am rechten Rand zugeführte Energie geeignet zu kontrollieren, und (4.36) zeigt, daß dabei die Differenzen  $u(t, x) - xl(t)$  und  $\theta(t, x) - \theta_a(0)$  linear von der Ziehgeschwindigkeit  $\rho$  abhängen.

Im vorliegenden linearen Fall erscheint dies natürlich mehr oder weniger selbstverständlich, und wir können die Entwicklung der Durchschnittstemperatur explizit angeben zu

$$\theta_a(t) = \theta_a(0) + b_0 \rho \int_0^{t/\rho} \mathcal{L}'(s) ds. \quad (4.37)$$

Interessant ist dann die Übertragung auf den nichtlinearen Fall, siehe Satz 4.5.

**Bemerkung 4.4** Alternativ zu (4.36) können wir auch die explizite Darstellung (4.33) der Lösung verwenden, indem wir die Norm von  $e^{-At}$  abschätzen gemäß

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X,X)} = C \max(\{\exp(-\lambda_k^{(j)} t) : j = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots\} \cup \{\exp(-\lambda_0^{(1)} t)\}).$$

Dabei ist jedoch wieder  $\lambda_0^{(1)} = 0$ , und daher erhalten wir nur

$$\|v(t)\|_{X=L^2 \times L^2 \times L^2} \leq \|v_0\|_X + C \int_0^t \|f(s)\|_X ds,$$

also (insbesondere für  $|\dot{l}|, |\ddot{l}|, |\dddot{l}|$  klein bzw. für  $\dot{l} \equiv 0$ ) eine schwächere Abschätzung als (4.35).  $\square$

Bevor wir nun im nächsten Abschnitt zu unserem nichtlinearen Problem zurückkehren, bemerken wir noch, daß wir mit der hier verwendeten Methode eine Abschätzung wie (4.35) im nichtviskosen Fall nicht erhalten können, da wir für  $\dot{l} \neq 0$  auch im nichtviskosen Fall in  $\dot{E}_1$  den Term

$$- \int_0^1 x \ddot{l} u_{txx}^2 dx$$

erhalten, dort aber keinen  $-\gamma \int_0^1 u_{txx}^2$  zum Ausgleichen zur Verfügung haben, und uns wegen des hyperbolischen Charakters der Impulsbilanz auch nicht durch Abziehen eines Terms der Bauart  $\eta F_1$  von  $E$  verschaffen können. Die weiteren Terme wie  $\int_0^1 x \ddot{l} u_{tt} dx$  und  $\int_0^1 \dot{l} b_0 \theta_t dx$  machen in dieser Hinsicht keine Probleme, jedoch scheint es so, daß wir die viskose Dämpfung benötigen, um insgesamt eine Abschätzung wie (4.35) zu bekommen.

Da der gleiche Effekt auch im nichtlinearen Problem auftritt, werden wir uns deshalb auch dort in Abwesenheit von viskoser Dämpfung auf den Fall  $\dot{l} \equiv 0$  einschränken.

### 4.3 Der nichtlineare nichtviskose Fall

In Abschnitt 4.1 haben wir gezeigt, daß die Bedingung  $\sigma_\varepsilon(l, \bar{\theta}) > -\mu\pi^2$  notwendig ist für die Stabilität der trivialen stationären Lösung  $(0, \bar{\theta})$ . In diesem Abschnitt zeigen wir nun zunächst für  $\dot{l} \equiv 0$  durch Übertragung der Methode aus Unterabschnitt 4.2.2 gleichsam die Rückrichtung, d.h. daß eine Lösung  $(u, \theta)$  zu Anfangsbedingungen nahe  $(0, \bar{\theta})$  exponentiell gegen eine triviale stationäre Lösung  $(0, \theta^*)$  konvergiert. Dabei benötigen wir noch die zusätzliche Bedingung

$$\sigma_\theta(l, \bar{\theta}) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow l \neq 0 \quad \text{nach (H4)}) \quad (4.38)$$

des Nicht-Verschwinden der (linearisierten) thermisch-mechanischen Kopplung, siehe Bemerkung 4.3. Die Übertragung der Methodik aus Unterabschnitt 4.2.3 auf den nichtlinearen viskosen Fall folgt dann in Abschnitt 4.4. Dort können wir auf (4.38) verzichten, hier notieren wir jedoch zunächst folgende Definition:

**Definition 4.3** Zu der gegebenen freien Energie  $\Psi$  nennen wir die Menge

$$\mathcal{S} = \{(l, \bar{\theta}) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_\varepsilon(l, \bar{\theta}) > -\mu\pi^2 \text{ und } l \neq 0\}$$

das zu  $(P_0)$  gehörige Stabilitätsgebiet der trivialen stationären Lösungen.

Zur Anschauung verweisen wir auf Abb.4.1. Dort ist  $\mathcal{S}$  schraffiert skizziert für  $\Psi$  in der Form (2.10) mit den in (2.12) gegebenen Daten, wobei wir jedoch um eine aussagefähige Skizze zu bekommen  $\mu$  auf den stark überhöhten Wert  $\mu = 200$  gesetzt haben. Der Grund ist, daß wir für  $\partial\mathcal{S} \setminus \{(\bar{\theta}, 0) : \theta > 0\}$ , also kurz gesagt für die Höhenlinie  $\sigma_\varepsilon(l, \theta) = -\mu\pi^2$  folgende explizite Auflösung bekommen, vgl. (2.13).

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1(\theta) &= \sqrt{y_1(\theta)} \text{ und } \tilde{l}_2(\theta) = \sqrt{y_2(\theta)}, \quad \text{wobei} \\ y_{1,2}(\theta) &= \frac{3\alpha_2}{10\alpha_3} \mp \left( \frac{9\alpha_2^2}{100\alpha_3^2} - (\theta - \theta_M) \frac{\alpha_1}{5\alpha_3} - \frac{\mu\pi^2}{5\alpha_3} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für das ursprüngliche  $\mu = 2 \cdot 10^{-10}$  ist  $\partial\mathcal{S}$  wegen  $\mu\pi^2 \approx 2 \cdot 10^{-9} \ll \alpha_1(\theta - \theta_M)$ , (denn  $\theta - \theta_M = \mathcal{O}(1)$ ) graphisch nicht von den in Abb. 4.1 ebenfalls dargestellten Kurven  $\pm l_1, l_2$  zu unterscheiden. Der Punkt ist aber gerade der, daß wir Stabilität der trivialen stationären Lösungen auch jenseits der Kurven  $\pm l_1, l_2$  erhalten, die in der  $\theta, l$ -Parameterenebene die Gebiete mit  $\sigma_\varepsilon < 0$  bzw. mit  $\sigma_\varepsilon > 0$  voneinander trennt.

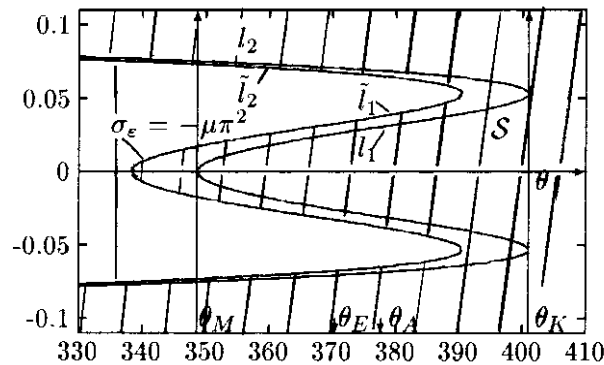


Abbildung 4.1: Die Kurven  $\pm l_1, l_2, \pm \tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ , das Stabilitätsgebiet  $\mathcal{S}$ ,  $\mu$  stark überhöht.

**Satz 4.4** (in Übertragung von [Sle81], Theorem 5.1) Es seien  $(l, \bar{\theta}) \in \mathcal{S}$ ,  $\dot{l} \equiv 0$  und  $(u_0, u_1, \theta_0)$  in  $H = H_D^5(0, 1) \times H_D^3(0, 1) \times H_N^3(0, 1)$  mit

$$\|u_0\|_{H^5} + \|u_1\|_{H^3} + \|\theta_0 - \bar{\theta}\|_{H^3}$$

hinreichend klein. Dann konvergiert die Lösung  $(u, \theta)$  von  $(P_0)$  zu diesen Anfangsdaten exponentiell in  $H$  gegen eine triviale stationäre Lösung  $(0, \theta^*)$  mit  $(l, \theta^*) \in \mathcal{S}$ , d.h. es gilt eine Abschätzung

$$\|(u, \theta)\|_2 \leq C \|(u, \theta)_{t=0}\|_2 e^{-\frac{\nu}{2}t} \text{ mit } C, \nu > 0. \quad (4.39)$$

Dabei ist die Halbnorm  $|(u, \theta)|_2$  definiert durch

$$|(u, \theta)|_2^2 = \|u\|_{H^5}^2 + \|u_t\|_{H^3}^2 + \|u_{tt}\|_{H^1}^2 + \|\theta_x\|_{H^2}^2 + \|\theta_t\|_{H^1}^2, \quad (4.40)$$

und  $\partial_t^2 u_0$  und  $\partial_t \theta_0$  sind gegeben durch (2.7a,b), d.h.

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_0 &= \sigma(\partial_x u_0 + l_0, \theta_0)_x - \mu \partial_x^4 u_0 \\ \partial_t \theta_0 &= -\frac{\kappa}{\theta_0 \Psi_{\theta\theta}} \partial_x^2 \theta_0 - \frac{1}{\Psi_{\theta\theta}} \sigma_\theta(\partial_x u_0 + l, \theta_0) \partial_x u_1. \end{aligned}$$

Wir geben zunächst eine Skizze des Beweises, in Unterabschnitt 4.3.1 folgen die benötigten Energieabschätzungen. Dabei sei durchgehend  $\min u_x := \min_{x \in [0,1]} u_x(t, x)$ ,  $\min \theta := \min_{x \in [0,1]} \theta(t, x)$  usw. Wie in Unterabschnitt 4.2.2 führen wir eine Energiefunktion  $E(t) = E(u_{xxxx}(t), \dots, \theta_{tx}(t), \dots)$  ein, für die nun unter der Voraussetzung, daß

$$[\min(u_x + l), \max(u_x + l)] \times [\min \theta, \max \theta] \subset B_{2\beta/3}^{\mathbb{R}^2}(l, \bar{\theta}), \quad (4.41)$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta &:= \text{dist}((l, \bar{\theta}), \partial \mathcal{S}) \\ &= \min\{\text{dist}((l, \bar{\theta}), \{(l, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_\varepsilon(l, \theta) = -\mu\pi^2 \vee l = 0\})\} \end{aligned}$$

Konstanten  $r > 0$  und  $R > 0$  existieren, sodaß gilt

$$r|(u, \theta)|_2^2 \leq E \leq R|(u, \theta)|_2^2. \quad (4.42)$$

Um die Abschätzungen übersichtlich zu halten, schreiben wir ferner (2.7) als

$$u_{tt} = a u_{xx} + b \theta_x - \mu u_{xxxx} \quad (4.43a)$$

$$c \theta_t = d \theta_{xx} + b u_{tx} \quad (4.43b)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= a(u_x + l, \theta) = \sigma_\varepsilon(u_x + l, \theta), & b &= b(u_x + l, \theta) = \sigma_\theta(u_x + l, \theta), \\ c &= c(u_x + l, \theta) = -\Psi_{\theta\theta}(u_x + l, \theta), & d &= d(u_x + l, \theta) = \frac{\kappa}{\theta}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

**Bemerkung 4.5** Tatsächlich hängt z.B.  $b = \sigma_\theta = \Psi'_1(u_x + l)$  bei unserer Zerlegung (2.14) von  $\Psi$  garnicht mehr von  $\theta$  ab, ebenso wie  $c = -\Psi''_0(\theta)$  und  $d = \kappa/\theta$  nicht von  $\varepsilon$  abhängen, sodaß bei vielen Abschätzungen, die wir im weiteren durchführen werden, wie z.B. vom Typ

$$|b_x| = \underbrace{|\sigma_{\theta\varepsilon}|}_{\leq C} |u_{xx}| + \underbrace{|\sigma_{\theta\theta}|}_{\leq C} |\theta_x| \leq C(|u_{xx}| + |\theta_x|)$$

schärfere Abschätzungen gelten, d.h. hier wegen  $\sigma_{\theta\theta} \equiv 0$  tatsächlich  $|b_x| \leq C|u_{xx}|$ . Wir werden dies im weiteren nicht berücksichtigen, um zu zeigen, daß die Aussagen hier auch für allgemeinere  $\Psi$  gelten. Die Zerlegung (2.14) diene hauptsächlich zur Vereinfachung der Abschätzung in Lemma 3.6, allerdings werden wir einige der Eigenschaften dieser Zerlegung in Abschnitt 4.4 wieder verwenden. Weiter liegt der tiefere Sinn der Abkürzungen (4.44) darin, die ursprüngliche Energiebilanz mit dem richtigen, d.h. konkret mit  $\theta/\theta$ , zu testen, oder anders gesagt die durch  $\theta$  geteilte Energiebilanz zu betrachten. Dabei werden dann die „Koeffizienten“  $-\theta\Psi_{\theta\theta} = \theta c$  und  $\kappa = \theta d$  durch  $\theta$  geteilt und anschließend geeignet abgeschätzt, und dann z.B.  $\theta_{xx}\theta$  als der „wichtige Term“ partiell integriert. Dies wird im nächsten Abschnitt klarer.  $\square$

Im Zentrum unserer a-priori Abschätzungen steht nun zunächst folgende Überlegung: Es sei  $\|u_0\|_{H_D^5} + \|u_1\|_{H_D^3} + \|\theta_0 - \bar{\theta}_0\|_{H_N^3} \leq \tilde{\delta}$ . Da (nach Satz 3.8 und wegen  $\dot{l} \equiv 0$ )

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \infty); H_D^5(0, 1)) \cap C^1([0, \infty); H_D^3(0, 1)) \cap C^2([0, \infty); H_D^1(0, 1)), \\ \theta &\in C([0, \infty); H_N^3(0, 1)) \cap C^1([0, \infty); H^1(0, 1)), \end{aligned}$$

existiert eine Zeit  $t_1$ , so daß

$$\|u(t)\|_{H^5} + \|u_t(t)\|_{H^3} + \|\theta(t) - \bar{\theta}_0\|_{H^3} \leq 2\tilde{\delta} \quad \forall t \in [0, t_1],$$

(dies folgt bereits aus dem entsprechenden lokalen Existenzsatz). Nach Sobolev erhalten wir daraus für ein  $\delta = C\tilde{\delta}$  die Abschätzungen

$$|u_x|, |u_{xx}|, |u_{xxx}|, |\partial_x^4 u|, |u_t|, |u_{tx}|, |u_{txx}|, |u_{tt}|, |\theta_x|, |\theta_{xx}|, |\theta_t| \leq \delta \quad (4.45)$$

$\forall t \in [0, t_1] \quad \forall x \in [0, 1]$ . Die punktweise a-priori Beschränktheit dieser Terme spielt eine zentrale Rolle im Beweis von Satz 4.4. Wegen  $(l, \theta) \in \mathcal{S}$  können wir dabei weiter  $\delta$  so klein wählen (eigentlich wählen wir stets  $\tilde{\delta}$ ), daß für alle  $t \in [0, t_1]$  gilt

$$[\min(u_x + l), \max(u_x + l)] \times [\min \theta, \max \theta] \subset B_{\beta/3}^{\mathbb{R}^2}(l, \bar{\theta})$$

Damit erhalten wir auf  $0 \leq t \leq t_1$  Schranken

$$\begin{aligned} -\mu\pi^2 < a_0 \leq a \leq a_1 & \quad 0 < b_0 \leq |b| \leq b_1 \\ 0 < c_0 \leq c \leq c_1 & \quad 0 < d_0 \leq d \leq d_1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Unter den Voraussetzungen (4.45) und (4.46) gelte nun mit einem  $\nu > 0$

$$\dot{E}(t) \leq -\nu E(t), \quad (4.47)$$

was wir im nächsten Unterabschnitt zeigen werden. Mit Gronwall folgt dann

$$E(t) \leq E(0)e^{-\nu t}. \quad (4.48)$$

Dies gilt also bei uns bis jetzt für  $0 \leq t \leq t_1$ . Weiter gilt jedoch noch (4.42) und damit

$$\begin{aligned} r|(u, \theta)_{t=t_1}|_2^2 &\leq E(t_1) \leq E(0)e^{-\nu t_1} \leq R|(u, \theta)_{t=0}|_2^2 e^{-\nu t_1} \\ \Leftrightarrow |(u, \theta)_{t=t_1}|_2^2 &\leq \frac{R}{r}|(u, \theta)_{t=0}|_2^2 e^{-\nu t_1} \end{aligned}$$

Gilt nun

$$|(u, \theta)_{t=0}|_2^2 \leq \frac{r}{R}e^{\nu t_1} \delta =: \delta_1,$$

so folgt  $|(u, \theta)_{t=t_1}|_2^2 \leq \delta$ . Dabei wollen wir weiter annehmen, daß  $\delta$  in (4.45) so klein war, daß gilt  $\|\theta(t, \cdot) - \bar{\theta}\|_\infty \leq \beta/3$  für  $0 \leq t \leq t_1$ . Damit können wir obiges Argument fortsetzen auf  $0 \leq t \leq 2t_1$  und erhalten

$$|(u, \theta)_{t=t_1+\tau}|_2^2 \leq \frac{R}{r}|(u, \theta)_{t=0}|_2^2 e^{-\nu(t_1+\tau)} = \delta e^{-\nu\tau} \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq t_1$$

Nach gegebenenfalls nochmaliger Verkleinerung von  $\delta$  in (4.45) können wir weiter  $\|\theta(t, \cdot) - \bar{\theta}\|_\infty \leq \beta/3$  auf  $0 \leq t \leq t_2$  annehmen und damit auf  $0 \leq t \leq t_3$  fortsetzen. Wegen der bei dieser Konstruktion folgenden exponentiellen gleichmäßigen Konvergenz von  $\theta_t$  gegen 0 brauchen wir  $\delta$  dabei irgendwann nicht mehr verkleinern, um auf  $0 \leq t \leq \infty$  fortzusetzen.

**Bemerkung 4.6** Die Schwierigkeit bei dem skizzierten Beweis liegt darin, beim exponentiellen Abfall von  $\theta_t$  die Konvergenz von  $\theta$  in einer *hinreichend kleinen* Kugel um  $\bar{\theta}$  zu sichern, um damit für alle Zeiten (4.46) sowie (4.42) mit festem  $r$  zu erfüllen. Für  $(u_x + l, \theta) \rightarrow \partial\mathcal{S} \setminus \{l = 0\}$  geht  $\mu\pi^2 - a_0$  und damit auch  $r$  gegen Null. Falls wir irgendwo einmal  $\partial\mathcal{S}$  erreichen, bricht die gesamte Argumentation zusammen. Aus diesem Grund müssen wir die sehr glatten (klassischen) Lösungen aus Satz 3.8 betrachten, um insbesondere  $\theta_t$  gleichmäßig kontrollieren zu können.

Wieder mit  $\theta_a(t) = \int_0^1 \theta(t, x) dx$  und  $\int_0^1 (\theta(t, x) - \theta_a(t))^2 dx \leq \int_0^1 \theta_x^2 dx$  können wir die Aussage von Satz 4.4 auch schreiben als

$$\|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^5 \times H^3} \leq e^{-\frac{\nu}{2}t} \sqrt{\frac{R}{r}} \|(u_0, \theta_0 - \theta_a(0))\|_{H^5 \times H^3}$$

und  $|\theta_a(t) - \theta^*| \xrightarrow{\text{exp}} 0$ .

Dabei ist die Grenztemperatur  $\theta^*$  eindeutig bestimmt durch

$$E^{(i)}(l, 0, \theta^*) \stackrel{!}{=} E_0 := E^{(i)}(\partial_x u_0 + l, u_1, \theta),$$

denn für alle  $(\varepsilon, \theta)$  gilt

$$D_\theta E^{(i)}(\varepsilon, 0, \theta) = \int_0^1 -\theta \Psi_{\theta\theta}(\varepsilon, \theta) dx > 0 \quad \text{nach (H3)}. \quad (4.49)$$

Hierauf werden wir in Kapitel 6 noch einmal zurückkommen. □

### 4.3.1 Energieabschätzungen höherer Ordnung, nichtlinear

Wir führen folgende Energiefunktionale ein

$$\left. \begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 u_{ttx}^2 + a u_{txx}^2 + c \theta_{tx}^2 + \mu (\partial_x^3 u_t)^2 dx \\ E_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\partial_x^3 u_t)^2 + a (\partial_x^4 u)^2 + c \theta_{xxx}^2 + \mu (\partial_x^5 u)^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Weiter benötigen wir die Hilfsfunktionale

$$F_1(t) = \int_0^1 u_{tx} u_{ttx} dx \quad \text{und} \quad F_2(t) = \int_0^1 -\partial_x^3 u \partial_x^3 u_t dx, \quad (4.51)$$

und setzen

$$E = E_1 + E_2 - \eta(F_1 + F_2),$$

für ein noch zu bestimmendes  $\eta > 0$ . In diesem Abschnitt setzen wir nun stets (4.41) und damit (4.45) und (4.46) voraus. Zunächst ist die Äquivalenz von  $E$  zu  $|(u, \theta)|_2^2$  zu zeigen. Wir zeigen  $r|(u, \theta)|_2^2 \leq E$  für ein  $r > 0$ , die andere Richtung ist trivial. Als Abkürzung benutzen wir

$$\bar{\alpha} := a_0 + \mu\pi^2. \quad (4.52)$$

Nach Voraussetzung gilt  $\bar{\alpha} > 0$ , und damit existiert ein  $\lambda \in (0, 1)$ , sodaß gilt

$$\bar{\beta}_1 := \bar{\alpha} - \lambda\mu\pi^2 > 0.$$

Betrachten wir zunächst den zweiten und den vierten Term in  $E_2$ , so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 a u_{xxxx}^2 dx &\geq a_0 \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx = (\bar{\alpha} - \mu\pi^2) \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx \\ &= (\bar{\alpha} - \lambda\mu\pi^2 - (1-\lambda)\mu\pi^2) \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nach Poincaré gilt  $\mu \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx \geq \mu\pi^2 \int_0^1 u_{xxx}^2 dx$  und damit

$$\mu \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx \geq (1-\lambda)\mu\pi^2 \int_0^1 u_{xxx}^2 dx + \lambda\mu \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx, \quad (4.54)$$

und zusammen erhalten wir aus (4.53) und (4.54)

$$\int_0^1 a(\partial_x^4 u)^2 dx + \mu \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx \geq \underbrace{(\bar{\alpha} - \lambda\mu\pi^2)}_{\bar{\beta}_1 > 0} \int_0^1 (\partial_x^4 u)^2 dx + \underbrace{\lambda\mu}_{> 0} \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx.$$

Analog verfahren wir in  $E_1$  und erhalten

$$\int_0^1 a u_{ttx}^2 + \mu u_{txxx}^2 dx \geq \bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{ttx}^2 dx + \lambda \int_0^1 u_{txxx}^2 dx,$$

wobei wir aus  $E_2$  sogar noch ein  $\int_0^1 u_{txxx}^2 dx$  überhaben. Weiter gilt

$$\int_0^1 c(\theta_{tx}^2 + \theta_{xxx}^2) dx \geq c_0 \int_0^1 \theta_{tx}^2 + \theta_{xxx}^2 dx. \quad (4.55)$$

Als nächstes sind die zwar in  $|(u, \theta)|_2^2$  jedoch überhaupt nicht in  $E_1 + E_2$  auftauchenden Terme

$$u^2, u_x^2, u_{xx}^2, u_{xxx}^2, u_t^2, u_{tx}^2, u_{tt}^2, \theta_x^2, \theta_{xx}^2 \text{ und } \theta_t^2$$

abzuschätzen. Dies ist bei den ersten neun einfach gemäß Poincaré zu

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 \pi^8 \int_0^1 u^2 dx &\stackrel{(A.1)}{\leq} \bar{\beta}_1 \pi^6 \int_0^1 u_x^2 dx \stackrel{(A.2)}{\leq} \bar{\beta}_1 \pi^4 \int_0^1 u_{xx}^2 dx \\ &\stackrel{(A.1)}{\leq} \bar{\beta}_1 \pi^2 \int_0^1 u_{xxx}^2 dx \stackrel{(A.2)}{\leq} \bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx, \end{aligned}$$

oder kurz

$$\frac{\bar{\beta}_1}{2} \int_0^1 u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2 dx \leq \bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx$$

und analog

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\beta}_1}{2} \int_0^1 u_t^2 + u_{tx}^2 + u_{ttx}^2 dx &\leq \bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{ttx}^2 dx, \quad \frac{1}{2} \int_0^1 u_{tt}^2 + u_{ttx}^2 dx \leq \int_0^1 u_{ttx}^2 dx, \\ \frac{c_0}{2} \int_0^1 \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 + \theta_{xxx}^2 dx &\leq c_0 \int_0^1 \theta_{xxx}^2 dx. \end{aligned}$$



Betreff  $\int_0^1 \theta_t^2 dx$  bekommen wir jedoch nur

$$\int_0^1 \theta_t^2 dx \leq \left( \int_0^1 \theta_t dx \right)^2 + \int_0^1 \theta_{tx}^2 dx.$$

Im linearen Fall galt dabei  $\int_0^1 \theta_t dx = 0$ , vgl (4.10), hier zeigen wir, daß wir  $\left( \int_0^1 \theta_t dx \right)^2$  nach oben durch  $C(E_1 + E_2)$  abschätzen können. Es gilt

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 \theta_t dx \right)^2 &= \left( \int_0^1 \frac{1}{c} (d\theta_{xx} + bu_{tx}) dx \right)^2 \\ &= \left( \underbrace{\left[ \frac{d}{c} \theta_x + \frac{b}{c} u_t \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \underbrace{\frac{d_x c - dc_x}{c^2}}_{|\cdot| \leq C\delta} \theta_x + \underbrace{\frac{b_x c - bc_x}{c^2}}_{|\cdot| \leq C\delta} u_t dx \right)^2 \\ &\leq \left( C\delta \int_0^1 |\theta_x| + |u_t| dx \right)^2 \leq C\delta \int_0^1 \theta_x^2 + u_t^2 dx, \end{aligned} \quad (4.56)$$

denn mit (4.41), (4.45) und nach Definition von  $a, b, c$  und  $d$  gilt

$$\begin{aligned} |b_x| &\leq \underbrace{|\sigma_{\theta\varepsilon}(u_x + l, \theta)|}_{\leq C} \underbrace{|u_{xx}|}_{\leq \delta} + \underbrace{|\sigma_{\theta\theta}(u_x + l, \theta)|}_{\leq C} \underbrace{|\theta_x|}_{\leq \delta}, \\ |c_x| &\leq \underbrace{|\sigma_{\theta\theta}(u_x + l, \theta)|}_{\leq C} \underbrace{|u_{xx}|}_{\leq \delta} + \underbrace{|\Psi_{\theta\theta\theta}(u_x + l, \theta)|}_{\leq C} \underbrace{|\theta_x|}_{\leq \delta} \end{aligned} \quad (4.57)$$

analog mit  $|d_x|$ , und nach Voraussetzung (4.46) sind auch  $b, c$  und  $d$  selbst beschränkt. Mit (4.56) folgt nun  $r|(u, \theta)| \leq E_1 + E_2$  für ein  $r > 0$ , und die benötigte Abschätzung  $r|(u, \theta)|_2^2 \leq E$  folgt dann für  $\eta$  hinreichend klein mittels  $\eta|F_1| \leq \frac{\eta}{2} \int_0^1 u_{tx}^2 + u_{ttx}^2 dx$  und  $\eta|F_2| \leq \frac{\eta}{2} \int_0^1 u_{xxx}^2 + u_{txxx}^2 dx$ .

Die Philosophie bei der Wahl von  $E$  ist, beim Differenzieren von  $E_1, E_2$  nun negativ definite Terme in  $\theta_{txx}^2, \theta_{txxx}^2$  erhalten, und ansonsten nur Terme mit Ableitungen von  $a, b, c$  und  $d$ . Die letzteren werden wir ähnlich wie in (4.57) abschätzen, und die ersten zum Erzeugen weiterer negativ definiter quadratischer Terme verwenden. Weiter benötigen wir noch negativ definite Terme in  $u_{ttx}^2$  und  $u_{txxxx}^2$ , die wir aus  $\dot{F}_1$  und  $\dot{F}_2$  erhalten. Generell setzen wir beim Ableiten von  $E$  wieder voraus, daß  $u, \theta$  und  $\Psi$  so glatt sind, daß alle auftretenden Terme existieren. Die Aussage folgt dann für  $u, \theta$  und  $\Psi$  so glatt wie in Satz 3.8 gegeben wieder mit dem üblichen Dichtheitsargument. Man beachte, daß alle in  $E$  selber auftretenden Terme wohldefiniert sind. Wesentlich ist weiter, daß alle geraden Ableitungen von  $u, u_t, u_{tt}, \dots$  und alle ungeraden Ableitungen von  $\theta, \theta_t, \dots$  in  $x = 0$  und  $x = 1$  verschwinden, und wir deshalb bei den von uns nun durchgeführten partiellen Integrationen keine Randterme erhalten. Wir beginnen mit

$$\dot{E}_1 = \int_0^1 u_{ttx} u_{tttx} + \frac{1}{2} a_t u_{txx}^2 + a u_{txx} u_{ttxx} + \frac{1}{2} c_t \theta_{tx}^2 + c \theta_{tx} \theta_{ttx} + \mu u_{txxx} u_{ttxxxx} dx, \quad (4.58)$$

und betrachten die Terme einzeln wie folgt: Unter Verwendung von (4.43a) gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{ttx} u_{tttx} dx &= \int_0^1 u_{ttx} (a u_{xx} + b \theta_x - \mu u_{xxx})_{tx} dx \\ &= \int_0^1 u_{ttx} (a_{tx} u_{xx} + a_t u_{xxx} + \underbrace{(a u_{ttxx})_x}_{\textcircled{1}} \\ &\quad + \underbrace{b_{tx} \theta_x}_{\textcircled{2}} + \underbrace{b_t \theta_{xx}}_{\textcircled{3}} + b_x \theta_{tx} + \underbrace{b \theta_{txx}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\mu \partial_x^5 u_t}_{\textcircled{3}}) dx \end{aligned}$$

Durch zweimalige partielle Integration kürzt sich nun  $u_{ttx} \cdot \textcircled{3}$  gegen den letzten Term in (4.58), denn

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{ttx} \cdot \textcircled{3} dx &= \int_0^1 -\mu u_{ttx} \partial_x^5 u_t dx = -\mu [u_{ttx} \underbrace{u_{txxxx}}_{=0}] + \mu \int_0^1 u_{ttxx} u_{txxxx} dx \\ &= \mu \underbrace{[u_{ttxx} u_{txxxx}]}_{=0} - \mu \int_0^1 u_{ttxxx} u_{txxxx} dx \end{aligned}$$

Ferner können wir den unerwünschten dritten Term  $a u_{ttxx} u_{ttxx}$  in (4.58) mit nicht abgelittenem Koeffizienten  $a$  durch partielle Integration des Produkts aus  $u_{ttx}$  und  $\textcircled{1}$  eliminieren, denn

$$\int_0^1 u_{ttx} \cdot \textcircled{1} dx = \int_0^1 u_{ttx} (a u_{ttxx})_x dx = [u_{ttx} a \underbrace{u_{ttxx}}_{=0}] - \int_0^1 \underbrace{u_{ttxx} a u_{ttxx}}_{\textcircled{4}} dx$$

sodaß sich  $\textcircled{4}$  gegen den dritten Term in (4.58) kürzt. Wir bauen nun den vorletzten Term in (4.58) um: Zunächst gilt

$$c \theta_{tx} \theta_{ttx} = (c \theta_t)_{tx} \underbrace{\theta_{tx}}_{\textcircled{5}} - \theta_{tx} (c_{tx} \theta_t + c_t \theta_{tx} + c_x \underbrace{\theta_{tt}}_{*}),$$

wobei wir später den ansonsten nirgendwo mehr auftauchenden Term  $*$  gemäß

$$\theta_{tt} = \left( \frac{d}{c} \theta_{xx} + \frac{b}{c} u_{tx} \right)_t \leq \underbrace{|(d/c)_t| |\theta_{xx}|}_{\leq C \delta} + \underbrace{|d/c| |\theta_{txx}|}_{\leq C} + \underbrace{|(b/c)_t| |u_{tx}|}_{\leq C \delta} + \underbrace{|b/c| |u_{ttx}|}_{\leq C}$$

ersetzen können, und dann die kritischen Terme  $C |\theta_{txx}|$  und  $C |u_{ttx}|$  unter Verwendung des  $c_x$  wieder zu

$$C \int_0^1 |c_x| |\theta_{txx}| dx \leq C \delta \int_0^1 \theta_{txx}^2 dx \quad \text{und} \quad C \int_0^1 |c_x| |u_{ttx}| dx \leq C \delta \int_0^1 u_{ttx}^2 dx$$

abschätzen können. Weiter gilt nun

$$(c \theta_t)_{tx} = d_{tx} \theta_{xx} + d_t \theta_{xxx} + \underbrace{(d \theta_{txx})_x}_{\textcircled{6}} + b_{tx} u_{tx} + b_t u_{txx} + \underbrace{(b u_{ttx})_x}_{\textcircled{7}},$$

und mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \textcircled{5} \cdot \textcircled{6} dx &= \underbrace{[\theta_{tx} d\theta_{txx}]}_{=0} - \int_0^1 \underbrace{d\theta_{txx}^2}_{\textcircled{8}} dx, \\ \int_0^1 \textcircled{5} \cdot \textcircled{7} dx &= \underbrace{[\theta_{tx} bu_{ttx}]}_{=0} - \int_0^1 \underbrace{b\theta_{txx}u_{ttx}}_{\textcircled{9}} dx.\end{aligned}$$

Der Term  $\textcircled{9}$  kürzt sich nun gegen übergebliebenen unerwünschten Term  $u_{ttx} \cdot \textcircled{2}$ , und der Term  $\textcircled{8}$  ist der gewünschte negativ definite quadratische Term in  $\theta_{txx}^2$ . Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= \int_0^1 a_t u_{xx} u_{ttx} + a_t u_{ttx} u_{xxx} + b_{tx} u_{ttx} \theta_x + b_t u_{ttx} \theta_{xx} + b_x u_{ttx} \theta_{tx} \\ &\quad + \frac{1}{2} a_t u_{ttx}^2 - \frac{1}{2} c_t \theta_{tx}^2 - c_{tx} \theta_{tx} \theta_t - c_x \theta_{tx} \theta_{tt} + d_{tx} \theta_{tx} \theta_{xx} + d_t \theta_{tx} \theta_{xxx} \\ &\quad + b_{tx} \theta_{tx} u_{tx} + b_t \theta_{tx} u_{txx} - d \theta_{txx}^2 dx,\end{aligned}$$

und mit analoger Rechnung

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \int_0^1 \partial_x^3 a \partial_x^2 u \partial_x^3 u_t + 3 \partial_x^2 a \partial_x^3 u \partial_x^3 u_t + 2 a_x \partial_x^4 u \partial_x^3 u_t + \partial_x^3 b \partial_x \theta \partial_x^3 u_t \\ &\quad + 3 \partial_x^2 b \partial_x^2 \theta \partial_x^3 u_t + 5 \partial_x b \partial_x^3 \theta \partial_x^3 u_t + \frac{1}{2} a_t (\partial_x^4 u)^2 + \frac{1}{2} c_t (\partial_x^3 \theta)^2 \\ &\quad - \partial_x^3 c \theta_t \partial_x^3 \theta - 3 \partial_x^2 c \partial_x \theta_t \partial_x^3 \theta - 3 \partial_x c \partial_x^2 \theta_t \partial_x^3 \theta + \partial_x^3 d \partial_x^2 \theta \partial_x \theta \\ &\quad + 3 \partial_x^2 d (\partial_x^3 \theta)^2 + 2 \partial_x d \partial_x^4 \theta \partial_x^3 \theta + \partial_x^3 b \partial_x u_t \partial_x^3 \theta - d (\partial_x^4 \theta)^2 dx.\end{aligned} \quad (4.59)$$

Der Vollständigkeit halber skizzieren wir noch einmal die Rechnung bei  $\dot{E}_2$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \int_0^1 u_{txxx} (a u_{xx} + b \theta_x - \mu \partial_x^4 u)_{xxx} \\ &\quad + \frac{1}{2} a_t (\partial_x^4 u)^2 + a \partial_x^4 u \partial_x^4 u_t + \frac{1}{2} c_t \theta_{xxx}^2 + c \partial_x^3 \theta \partial_x^3 \theta_t + \mu \partial_x^5 u \partial_x^5 u_t dx\end{aligned} \quad (4.60)$$

mit

$$\begin{aligned}(a u_{xx} + b \theta_x - \mu \partial_x^4 u)_{xxx} &= a_{xxx} u_{xx} + 3 a_{xx} u_{xxx} + 3 a_x \partial_x^4 u + a \partial_x^5 u \\ &\quad + b_{xxx} \theta_x + 3 b_{xx} \theta_{xx} + 3 b_x \theta_{xxx} + b \partial_x^4 \theta - \mu \partial_x^7 u\end{aligned} \quad (4.61)$$

und

$$c \partial_x^3 \theta \partial_x^3 \theta_t = (c \theta_t)_{xxx} \theta_{xxx} - \theta_{xxx} (c_{xxx} \theta_t + 3 c_{xx} \theta_{tx} + 3 c_x \theta_{ttx}) \quad (4.62)$$

mit wiederum

$$\begin{aligned}(c \theta_t)_{xxx} &= (d \theta_{xx} + b u_{tx})_{xxx} \\ &= d_{xxx} \theta_{xx} + 3 d_{xx} \theta_{xxx} + 3 d_x \partial_x^4 \theta + d \partial_x^5 \theta \\ &\quad + b_{xxx} u_{tx} + 3 b_{xx} u_{txx} + 3 b_x \partial_x^3 u_t + b \partial_x^4 u_t.\end{aligned} \quad (4.63)$$

Bei partieller Integration in (4.60) fallen wieder die Randterme raus, und wir erhalten die Darstellung von  $\dot{E}_2$  in (4.59). Als Beispiel dazu betrachten wir die partielle Integration des vierten Terms  $d\partial_x^5\theta$  auf der rechten Seite von (4.63) mit dem zweiten Faktor  $\theta_{xxx}$  des ersten Terms auf der rechten Seite von (4.62), und erhalten

$$\int_0^1 \partial_x^5\theta d\partial_x^3\theta dx = [\partial_x^4\theta d \underbrace{\partial_x^3\theta}_=0]_0^1 - \int_0^1 \partial_x^4\theta d_x \partial_x^3\theta + d(\partial_x^4\theta)^2 dx. \quad (4.64)$$

Der erste Term der rechten Seite von (4.64) ergibt zusammen mit dem Produkt aus dem zweiten Faktor des ersten Terms der rechten Seite von (4.62) und dem dritten Term der rechten Seite von (4.63) den Term  $2d_x\partial_x^4\theta\partial_x^3\theta$  in  $\dot{E}_2$ . Der Term  $-d(\partial_x^4\theta)$  ist schließlich wieder der, den wir erhalten wollten, und nach Voraussetzung  $0 < d_0 \leq d$  und Poincaré gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 -d\theta_{txx}^2 dx &\leq -\frac{d_0}{2} \int_0^1 \theta_{txx}^2 + \theta_{tx}^2 dx, \\ \int_0^1 -d\theta_{xxxx}^2 dx &\leq -\frac{d_0}{2} \int_0^1 \theta_{xxxx}^2 + \theta_{xxx}^2 + \theta_{xx}^2 + \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

Analog zu (4.59) erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \dot{F}_1 &= \int_0^1 u_{ttt}^2 - \mu(\partial_x^3 u_t)^2 - au_{xxt}^2 + bu_{tx}\theta_{txx} + a_{xt}u_{xx}u_{tx} + a_t u_{xxx}u_{tx} \\ &\quad + b_{tx}\theta_x u_{tx} + b_t\theta_{xx}u_{tx} + b_x\theta_{tx}u_{tx} dx, \\ \dot{F}_2 &= \int_0^1 -u_{txxx}^2 + \mu(\partial_x^5 u)^2 + au_{xxxx}^2 - b\partial_x^4\theta\partial_x^3 u - \partial_x^3 a\partial_x^2 u\partial_x^3 u \\ &\quad - 3\partial_x^2 a(\partial_x^3 u)^2 - 2\partial_x a\partial_x^4 u\partial_x^3 u - \partial_x^3 b\partial\theta\partial_x^3 u - 3\partial_x^2 b\partial_x^2\theta\partial_x^3 u \\ &\quad - 3\partial_x b\partial_x^3\theta\partial_x^3 u dx, \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

und dabei gilt wiederum

$$-\eta \int_0^1 \mu(\partial_x^5 u)^2 + au_{xxxx}^2 dx \leq -\eta\bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx - \eta\lambda\mu \int_0^1 u_{xxxxx}^2 dx.$$

**Bemerkung 4.7** Im Unterschied zu Unterabschnitt 4.2.2 bekommen wir also wegen des Grenzflächenterms bereits aus  $\dot{F}_2$  negativ definite Terme in  $u_{xxxx}^2$  und  $u_{xxxxx}^2$ , sodaß wir nur noch einen solchen in  $u_{txxx}^2$  erzeugen müssen, d.h. der zu (4.29) analoge Schritt fällt nun weg.  $\square$

Wir notieren noch

$$\begin{aligned} -\eta \int_0^1 u_{ttt}^2 &\leq -\frac{\eta}{2} \int_0^1 u_{ttt}^2 + u_{tt}^2 dx \\ -\eta\bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{txxx}^2 dx &\leq -\frac{\eta}{2}\bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{txxx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xx}^2 dx, \end{aligned}$$

und erhalten damit in

$$\dot{E} = (\text{rechte Seiten von (4.59)}) - \eta(\text{rechte Seiten von (4.65)})$$

negativ definite Terme

$$-\frac{d_0}{2}\theta_{txx}^2, -\frac{d_0}{2}\theta_{tx}^2, -\frac{d_0}{2}\theta_{xxxx}^2, -\frac{d_0}{2}\theta_{xxx}^2, -\frac{d_0}{2}\theta_{xx}^2, -\frac{d_0}{2}\theta_x^2$$

aus (4.59) und

$$-\frac{\eta}{2}u_{ttt}^2, -\frac{\eta}{2}u_{tt}^2, -\eta\lambda\mu(\partial_x^5 u)^2, -\frac{\eta\bar{\beta}_1}{2}u_{xxxx}^2, -\frac{\eta\bar{\beta}_1}{2}u_{xxx}^2, -\frac{\eta\bar{\beta}_1}{2}u_{xx}^2$$

aus (4.65). Als nächstes erzeugen wir einen negativ definiten Term in  $\theta_t^2$  mittels

$$-\frac{d_0}{4}\int_0^1\theta_{tx}^2 dx \leq \frac{d_0}{4}\left(\int_0^1\theta_t dx\right)^2 - \frac{d_0}{4}\int_0^1\theta_t^2 dx,$$

und bemerken, daß nach (4.56) gilt

$$\frac{d_0}{4}\left(\int_0^1\theta_t dx\right)^2 \leq C\delta\int_0^1\theta_x^2 + u_t^2 dx.$$

Jetzt verwenden wir wieder die für uns wesentliche Beobachtung aus [Sle81], daß wir aus  $-\theta_{xxxx}^2$  und  $-\theta_{txx}^2$  mittels der Ungleichung (4.27) einen negativ definiten Term  $-u_{txxx}^2$  erzeugen können, d.h. wir führen eine zu (4.28) analoge Rechnung durch. Dazu berechnen wir zunächst unter Verwendung der Energiebilanz (4.43b)

$$\begin{aligned} d\theta_{xxx} &= (c\theta_t - bu_{tx})_x - d_x\theta_{xx} = c_x\theta_t + c\theta_{tx} - b_xu_{tx} - bu_{txx} - d_x\theta_{xx} \\ \rightsquigarrow d\theta_{xxxx} &= c_{xx}\theta_t + 2c_x\theta_{tx} + c\theta_{txx} - b_{xx}u_{tx} - 2b_xu_{txx} - bu_{txxx} - d_{xx}\theta_{xx} - d_x\theta_{xxx} \\ \rightsquigarrow \theta_{xxxx}^2 &= \frac{1}{d^2}((c\theta_{txx} - bu_{txxx})^2 + R_1), \end{aligned}$$

wobei

$$R_1 = c_{xx}^2\theta_t^2 + 2c_{xx}\theta_t c_x\theta_{tx} + c_x x\theta_t c\theta_{txx} + \dots + d_x^2\theta_{xxx}^2$$

nur aus Summanden besteht, die in mindestens einem Faktor eine einfache oder doppelte Ableitung von  $b, c$  oder  $d$  nach  $x$  enthalten. Es gilt nun

$$\begin{aligned} -\frac{d_0}{4}\int_0^1\theta_{txx}^2 + (\partial_x^4\theta)^2 dx &\leq -\frac{d_0}{4d_1^2}\int_0^1\frac{d_1^2}{c_1^2}c^2\theta_{txx}^2 + (c\theta_{txx} - bu_{txxx})^2 + \frac{d_1^2}{d^2}R_1 dx \\ &\leq -\frac{d_0}{4d_1^2}\int_0^1\alpha_1\frac{1+\alpha_1}{2+\alpha_1}c_0^2\theta_{txx}^2 + \frac{\alpha_1}{2+2\alpha_1}b_0^2u_{txxx}^2 + \frac{d_1^2}{d^2}R_1 dx, \end{aligned}$$

wobei wir (4.27) mit  $\alpha_1 = d_1^2/c_1^2 > 0$  benutzt haben, und genau an dieser Stelle benötigen wir  $0 < b_0 \leq |b| < b_1$  und darum  $l \neq 0$  in Definition von  $\mathcal{S}$ . Wir setzen

$$\bar{\beta}_2 := \frac{d_0}{4d_1^2}\frac{\alpha_1}{2+2\alpha_1}b_0^2 = \frac{d_0b_0^2}{8(c_1^2 + d_1^2)},$$

und mit Poincaré bekommen wir wieder

$$-\bar{\beta}_2 \int_0^1 u_{txxx}^2 dx \leq -\frac{\bar{\beta}_2}{2} \int_0^1 u_{txxx}^2 + u_{txx}^2 + u_{tx}^2 + u_t^2 dx.$$

Man beachte dabei, daß  $\bar{\beta}_2$  nicht von  $\eta$  abhängt, und daß wir damit insbesondere die aus  $\dot{F}_1$  und  $\dot{F}_2$  stammenden in  $\dot{E}$  positiv definit auftretenden Terme

$$\eta \int_0^1 (\mu + 1) u_{txxx}^2 + a u_{txx}^2 dx$$

kontrollieren können.

Als nächstes schätzen wir die jeweils vierten Summanden aus  $\dot{F}_1$  und  $\dot{F}_2$ , in denen  $b$  ohne Ableitung auftritt, wie folgt ab. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\beta}_2}{4} \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \frac{d_0}{4} \int_0^1 \theta_{txxx}^2 dx + \eta \left| \int_0^1 b u_{tx} \theta_{txx} dx \right| \\ & \leq \left( -\frac{\bar{\beta}_2}{4} + \frac{\eta b_1^2}{2} \right) \int_0^1 u_{tx}^2 dx + \left( -\frac{d_0}{4} + \frac{\eta b_1^2}{2} \right) \int_0^1 \theta_{txx}^2 dx \\ & \leq -\frac{\bar{\beta}_2}{8} \int_0^1 u_{tx}^2 dx - \frac{d_0}{8} \int_0^1 \theta_{txx}^2 dx \end{aligned}$$

für  $\eta$  hinreichend klein. Die Abschätzung des vierten Terms in  $\dot{F}_2$  bedarf etwas Aufmerksamkeit, da wir einen  $-u_{xxx}^3$  Term nur mit Vorfaktor  $\eta$  zur Verfügung haben, es gilt jedoch nach Young

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{4} \int_0^1 u_{xxx}^2 dx - \frac{d_0}{4} \int_0^1 \theta_{xxxx}^2 dx + \eta \left| \int_0^1 b \theta_{xxxx} u_{xxx} dx \right| \\ & \leq \left( -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{4} + \eta \tau b_1^2 \right) \int_0^1 u_{xxx}^2 dx + \left( -\frac{d_0}{4} + \frac{\eta b_1^2}{4\tau} \right) \int_0^1 \theta_{xxxx}^2 dx \\ & \leq -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{8} \int_0^1 u_{xxx}^2 dx - \frac{d_0}{8} \int_0^1 \theta_{xxxx}^2 dx, \quad (4.66) \end{aligned}$$

wenn wir zuerst  $\tau$  so wählen, daß  $b_1^2 \tau \leq \bar{\beta}_1/8$ , und dann  $\eta$  so, daß  $\eta b_1^2/(4\tau) \leq d_0/8$ .

Es bleiben die Terme aus  $\dot{E}$  und  $R_1$  mit abgeleiteten „Koeffizienten“ wie  $a_x$ ,  $a_{xx}$ ,  $a_{xxx}$ ,  $a_t$ ,  $a_{tx}$ ,  $b_t$ , ... abzuschätzen. Die einfachen Ableitungen wie  $a_x$ ,  $a_t$ ,  $b_x$ , ... haben wir bereits in (4.57) abgeschätzt gemäß (noch einmal als Beispiel)

$$|a_t| = \left| \frac{d}{dt} \sigma_\varepsilon(u_x + l, \theta) \right| \leq |\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(u_x + l, \theta) u_{xt}| + |\sigma_{\varepsilon\theta}(u_x + l, \theta) \theta_t| \leq C\delta$$

und damit folgt (wieder als Beispiel)

$$|a_t u_{tt} u_{xx}| \leq \frac{1}{2} C\delta (u_{tt}^2 + u_{xx}^2).$$

Die gleiche Technik können wir auch für alle Terme mit zweifach nach  $x$  abgeleiteten Koeffizienten verwenden wie z.B.

$$\begin{aligned} |a_{xx}| &= |\sigma_{\varepsilon\varepsilon} u_{xx}^2 + \sigma_\varepsilon u_{xxx} + 2\sigma_{\varepsilon\theta} u_{xx} \theta_x + \sigma_{\theta\theta} \theta_x^2 + \sigma_\theta \theta_{xx}| \\ &\leq |\sigma_{\varepsilon\varepsilon}| \underbrace{|u_{xx}^2|}_{\leq \delta^2} + |\sigma_\varepsilon| \underbrace{|u_{xxx}|}_{\leq \delta} + 2|\sigma_{\varepsilon\theta}| \underbrace{|u_{xx}| |\theta_x|}_{\leq \delta^2} + |\sigma_{\theta\theta}| \underbrace{|\theta_x^2|}_{\leq \delta^2} + |\sigma_\theta| \underbrace{|\theta_{xx}|}_{\leq \delta} \leq C\delta. \end{aligned}$$

Terme mit Koeffizienten mit gemischter zweiter Ableitung wie etwa den ersten in  $\dot{E}_3$  schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |a_{tx}u_{xx}u_{ttx}| &= |(\partial_\varepsilon^3\sigma u_{xx}u_{xt} + \partial_\varepsilon^2\partial_\theta\sigma\theta_x u_{tx} + \partial_\varepsilon^2\sigma u_{txx} \\ &\quad + \partial_\varepsilon^2\partial_\theta\sigma u_{xx}\theta_t + \partial_\varepsilon\partial_\theta^2\sigma\theta_x\theta_t + \partial_\varepsilon\partial_\theta\sigma \underbrace{\theta_{tx}}_{\textcircled{1}})u_{xx}u_{ttx}| \\ &\leq C\delta(|u_{xx}u_{ttx}| + |\theta_{tx}u_{ttx}|) \leq C\delta(u_{xx}^2 + u_{tt}^2 + \theta_{tx}^2 + u_{ttx}^2). \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, daß der unterklammerte Term  $\textcircled{1}$  als einziger innerhalb der Klammer nicht nach (4.45) durch  $\delta$  beschränkt ist, und deshalb gegen den in (4.45) enthaltenen Term  $|u_{xx}|$  „getauscht“ werden mußte.

Analog verfahren wir Termen mit dreifach nach  $x$  differenzierten Koeffizienten, z.B.

$$\begin{aligned} a_{xxx} &= \partial_\varepsilon^4\sigma u_{xx}^3 + 3\partial_\varepsilon^3\sigma_\theta u_{xx}^2\theta_x + 3\partial_\varepsilon^3\sigma u_{xx}u_{xxx} + 3\partial_\varepsilon^2\partial_\theta^2\sigma u_{xx}\theta_x^2 + 3\partial_\varepsilon^2\sigma_\theta u_{xx}\theta_{xx} \\ &\quad + 3\partial_\varepsilon^2\sigma_\theta u_{xxx}\theta_x + 3\partial_\theta^2\sigma_\varepsilon\theta_x\theta_{xx} + \partial_\theta^3\sigma_\varepsilon\theta_x^3 + \sigma_{\varepsilon\varepsilon}\partial_x^4u + \sigma_{\varepsilon\theta}\theta_{xxx}. \end{aligned}$$

Der letzte Term ist nicht punktweise beschränkt, aber wir können  $|\sigma_{\varepsilon\theta}\theta_{xxx}\partial_x^2u\partial_x^3u_t|$  als Teil von  $\partial_x^3a\partial_x^2u\partial_x^3u_t$ , also des ersten Summanden von  $\dot{E}_2$ , abschätzen durch  $|\sigma_{\varepsilon\theta}\theta_{xxx}\partial_x^2u\partial_x^3u_t| \leq C\delta|\partial_x^3\theta\partial_x^3u_t|$ , da eben  $|u_{xx}| \leq \delta$  nach (4.45). Insgesamt erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \dot{E} &\leq C\delta \int_0^1 u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2 + u_{tx}^2 + u_{txx}^2 + u_{txxx}^2 + u_{tt}^2 + u_{ttx}^2 \\ &\quad + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 + \theta_{xxx}^2 + \theta_t^2 + \theta_{tx}^2 dx \\ &\quad - \frac{d_0}{4} \int_0^1 \theta_t^2 + \theta_{tx}^2 + \theta_{txx}^2 + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 + \theta_{xxx}^2 dx \\ &\quad - \frac{\bar{\beta}_2}{4} \int_0^1 u_{tx}^2 + u_{txx}^2 + u_{txxx}^2 dx - \frac{\eta}{4} \int_0^1 u_{tt}^2 + u_{ttx}^2 dx \\ &\quad - \frac{\eta\bar{\beta}_1}{4} \int_0^1 u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2 dx - \eta\lambda\mu \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx \\ &\leq -\nu E \end{aligned}$$

für ein  $\nu > 0$  bei geeigneter Wahl von  $\delta$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Bemerkung 4.8** In [Sle81] wird das System (4.43) ohne die Regularisierung durch die Grenzflächenenergie ( $\mu = 0$ ), mit in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0, \theta = 0$  in  $\varepsilon$  konvexen freien Energie betrachtet, d.h. insgesamt mit den sinngemäß (4.46) entsprechenden Voraussetzungen

$$\begin{aligned} 0 < a_0 \leq a = \sigma_\varepsilon(u_x, \theta) < a_1, \quad 0 < b_0 \leq |b| < b_1, \\ 0 < c_0 \leq c \leq c_1, \quad 0 < d_0 \leq d \leq d_1, \end{aligned} \tag{4.67}$$

wobei  $\theta$  die Differenz zu einer Referenztemperatur bezeichnet, und der Wärmefluß von  $\theta$  und  $\theta_x$  abhängen kann. Als Randbedingungen betrachtet Slemrod zum einen  $u_x = 0$ ,  $\theta = 0$  in  $x = 0, 1$  sowie zum zweiten

$$u = 0, \theta_x = 0 \quad \text{in } x = 0 \text{ und } x = 1. \quad (4.68)$$

Für beide Fälle wird dann ein im Vergleich zu unserem  $E$  eher komplizierteres Energiefunktional benutzt, um für hinreichend kleine Anfangsbedingungen

$$u_0 \in H^3(0, 1), \quad u_1 \in H^2(0, 1) \text{ und } \theta_0 \in H^4(0, 1)$$

mittels des Banachschen Fixpunktsatz nach Betrachten des entsprechenden linearen Hilfsproblems (vgl. Abschnitt 3.4) zunächst die Existenz lokaler glatter Lösungen zu beweisen. Das entsprechende  $E$  wird dann weiter verwendet, um die globale Existenz der Lösungen, sowie für die Randbedingungen (4.68) die gleichmäßige Konvergenz von

$$u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \theta_t, \theta_x, \theta_{xx} \rightarrow 0$$

zu beweisen (Theorem 5.1). Aus dem Beweis dieses Satzes in [Sle81] haben wir nun neben den Bezeichnungen  $a, b, c, d$  und der mehrfach erwähnten zentralen Idee, die thermisch-mechanische Kopplung zu verwenden, um aus den Termen  $-\theta_{txx}^2$  usw. der thermischen Dissipation negativ definite Terme in  $u_{txxx}^2$  zu erzeugen, weitere Techniken, –wie z.B. das Abschätzen der abgeleiteten Koeffizienten wie  $|a_x|$ ,  $|a_{xx}|$  usw. durch  $C\delta$  von Slemrod übernommen.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß es auch bei Slemrod wesentlich ist, hinreichend glatte Lösungen zu betrachten, und deshalb hinreichend glatte Anfangsbedingungen und auch ein hinreichend glattes  $\Psi$  vorauszusetzen, damit insbesondere (4.67) stets erfüllt ist.

Wenn wir bei uns (4.46) global voraussetzen würden, so könnten wir die gleiche Rechnung auch für das z.B. eine Ableitungsordnung schwächere Energiefunktional  $E = E_1 + E_2 - \eta(F_1 + F_2)$  mit

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_{tt}^2 + au_{tx}^2 + c\theta_t^2 + \mu(u_{txx})^2 dx$$

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_{txx}^2 + au_{xxx}^2 + c\theta_{xx}^2 + \mu(u_{xxxx})^2 dx$$

und

$$F_1(t) = \int_0^1 u_t u_{tt} dx \quad \text{sowie} \quad F_2(t) = \int_0^1 -u_{xx} u_{txx} dx,$$

durchführen. Da wir dabei jedoch die Kontrolle über  $\|\theta_t\|_\infty$  verlieren, ist dies nicht möglich, wenn (4.46) nur gilt, solange

$$[\min(u_x + l), \max(u_x + l)] \times [\min \theta, \max \theta] \subset \mathcal{S},$$

vgl. Bemerkung 4.6.

□



#### 4.4 Der nichtlineare viskose Fall

**Satz 4.5** *Es sei  $l \in C^3([0, \infty))$  mit  $(l(0), \bar{\theta}) \in \mathcal{S}$ , wobei nun  $\mathcal{S} := \{(l, \theta) \in \mathbb{R} \times R_+ : \sigma_\varepsilon(l, \theta) > -\mu\pi^2\}$ . Ferner seien  $|\dot{l}|$  und  $\|u_0\|_{H^5} + \|u_1\|_{H^3} + \|\theta_0 - \bar{\theta}\|_{H^3}$  hinreichend klein. Es sei weiter  $(u, \theta)$  die zugehörige Lösung von  $(P_\gamma)$ , sowie  $\beta := \text{dist}((l(0), \bar{\theta}), \partial\mathcal{S})$ . Schließlich seien  $E_1, E_2$  und  $F_2$  definiert wie in (4.50) und  $\theta_a(t) := \int_0^1 \theta(t, x) dx$ . Dann gibt es eine Zeit  $T > 0$ , sodaß für  $0 \leq t \leq T$  gilt:*

$$\text{dist}([\min(u_x + l), \max(u_x + l)] \times [\min \theta, \max \theta], \partial\mathcal{S}) \geq \beta/2, \quad (4.69)$$

und es existiert ein  $\eta > 0$ , sodaß auf  $0 \leq t \leq T$  für  $E := E_1 + E_2 - \eta F_2$  ferner die Ungleichung

$$r \|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^5 \times H^3}^2 \leq E + \ddot{l}(t)^2 \quad (4.70)$$

mit einem  $r > 0$  gilt, sowie die Abschätzung

$$E(t) \leq E(0)e^{-\nu t} + C \int_0^t (\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{\dot{l}}^2) e^{-\nu(t-\tau)} d\tau \quad (4.71)$$

für ein  $\nu > 0$ , und damit insgesamt

$$\begin{aligned} \|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^5 \times H^3}^2 \leq \\ \frac{1}{r} \left( E(0)e^{-\nu t} + C \int_0^t (\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{\dot{l}}^2) e^{-\nu(t-\tau)} d\tau + \ddot{l}(t)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Im Falle  $\dot{l} \equiv 0$  können wir dabei die Anfangsbedingungen so klein wählen, daß  $T = \infty$  gilt, und  $\|(u, \theta)\|_2^2$ , definiert wie in (4.40), exponentiell gegen Null konvergiert.

**Bemerkung 4.9** Diese vorsichtige Formulierung der zu (4.35) analogen Aussage (4.71) haben wir gewählt, da die Abschätzung (4.71) voraussetzt, daß (4.69) gilt. Auf der anderen Seite folgt (4.69) aus (4.71) falls wir hinreichend langsam ziehen, und mit  $l$  innerhalb „geeigneter Bereiche“ bleiben. Das Problem ist jedoch, daß die geeigneten Bereiche für  $l$  (sodaß (4.69) gilt) außer von  $\min u_x, \max u_x$  (von diesen wissen wir direkt aus (4.71), daß sie fallen bzw. klein bleiben) auch von  $[\min \theta(t), \max \theta(t)]$  abhängen, und wir diese deshalb nicht a-priori festlegen können. Durch (4.71) können wir jedoch  $\|\theta_t\|_\infty$  und damit auch  $[\min \theta(t), \max \theta(t)]$  geeignet kontrollieren. Benutzen wir schließlich wieder wie in Abschnitt 4.2.3 die Reskalierung  $l(t) = l_\rho(t) = \mathcal{L}(\rho t)$ , und sei  $T_1$  daß  $T$  aus Satz 4.5 für  $\rho = 1$ , so wird (4.72) zu

$$\|(u(t, \cdot), \theta(t, \cdot) - \theta_a(t))\|_{H^5 \times H^3} \leq C_0 \rho + e^{-\frac{\nu}{2} t} \sqrt{E(0)} + \mathcal{O}(\rho^2)$$

für  $0 \leq t \leq T_\rho := T_1/\rho$ , wobei wieder  $C_0^2 := C \max\{|\mathcal{L}'(s)| : 0 \leq s \leq T_\rho\}$ . Offen bleibt die Frage, wie nun  $\theta_a : [0, T_\rho] \rightarrow \mathbb{R}$  in Abhängigkeit von  $l : [0, T_\rho] \rightarrow \mathbb{R}$  charakterisiert werden kann. Wir vermuten, daß dies in etwa analog zu (4.37) möglich ist, und zwar in der Form

$$\theta_a(t) = \theta_a(0) + C\rho \int_0^{t/\rho} \mathcal{L}'(s) ds + \mathcal{O}(\rho^2).$$

Der Term  $\mathcal{O}(\rho^2)$  erklärt sich (in unserer Vermutung) daraus, daß im nichtlinearen System jede Bewegung des Drahtes mit der Geschwindigkeit  $\rho$  auf Grund der viskosen Dämpfung zu einer Erwärmung in der Größenordnung  $\gamma\rho^2$  führt, unabhängig davon, ob wir am rechten Rand ziehen oder drücken.  $\square$

**Beweis von Satz 4.5.** Die erste Aussage, daß ein  $T > 0$  existiert, sodaß (4.69) gilt für  $0 \leq t \leq T$ , ist klar aus dem lokalen Existenzsatz 3.4. Auf  $0 \leq t \leq T$  erhalten wir dann wieder die Schranken (4.46).

Nachdem wir dann (4.71) gezeigt haben, ist die Aussage für  $\dot{l} \equiv 0$  am Schluß von Satz 4.5 ist vollkommen analog zu Satz 4.4, da wir die analoge Äquivalenz von  $E$  und  $|(u, \theta)|_2^2$  bekommen. Für  $\dot{l} \not\equiv 0$  sind jedoch  $E$  und  $|(u, \theta)|_2^2$  nicht mehr äquivalent, und wir zeigen zunächst (4.70). Hier gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx &= \int_0^1 \underbrace{\left(u_{xxxx} + x \frac{\ddot{l}}{\mu}\right)^2}_{=0 \text{ auf Rand}} - 2x \frac{\ddot{l}}{\mu} u_{xxxx} - x^2 \frac{\ddot{l}^2}{\mu^2} dx \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \left(\partial_x^5 u + \frac{\ddot{l}}{\mu}\right)^2 dx + \tau \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx + \frac{1}{4\tau} \frac{\ddot{l}^2}{\mu^2} + \frac{\ddot{l}^2}{3\mu^2} \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx + \tau \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx + C(\tau) \ddot{l}^2 \end{aligned}$$

und deshalb mit den gleichen Bezeichnungen wie in (4.52), also  $\bar{\alpha} = a_0 + \mu\pi^2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu (\partial_x^5 u)^2 + a u_{xxxx}^2 dx &\geq \\ (1 - \lambda) \mu \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx + \lambda \mu \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx + \underbrace{(\bar{\alpha} - \lambda\mu\pi^2 - (1 - \lambda)\mu\pi^2)}_{=a_0} \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx \\ &\geq \underbrace{(\bar{\alpha} - \lambda\mu\pi^2 - \tau)}_{=: \beta_1} \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx + \lambda \mu \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx - C(\tau) \ddot{l}^2 \quad (4.73) \end{aligned}$$

mit  $\bar{\beta}_1 > 0$  für ein geeignetes  $\lambda \in (0, 1)$  und  $\tau$  hinreichend klein. Die niedrigeren Ableitungen von  $u$  können wir dann wieder unmittelbar nach Poincaré abschätzen zu

$$\int_0^1 u^2 dx \stackrel{(A.1)}{\leq} \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u_x^2 dx \stackrel{(A.2)}{\leq} \frac{1}{\pi^4} \int_0^1 u_{xx}^2 dx \stackrel{(A.1)}{\leq} \frac{1}{\pi^6} \int_0^1 u_{xxx}^2 dx \stackrel{(A.2)}{\leq} \frac{1}{\pi^8} \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx,$$

da wir dabei die richtigen Randbedingungen haben, und (4.70) folgt dann mit

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\theta(t, x) - \theta_a(t))^2 dx &\stackrel{(A.2)}{\leq} \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \theta_x^2 dx \quad \text{und} \\ \int_0^1 c \theta_{xxx}^2 dx &\geq \frac{c_0}{2} \int_0^1 \theta_{xxx}^2 + \theta_{xx}^2 + \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

Man beachte, daß wir auf diese Weise auch wieder  $\|\theta_t\|_\infty$  durch  $E$  kontrollieren können. Zum Beweis von (4.71) schätzen wir schließlich das Funktional  $E$  ähnlich wie in Unterabschnitt 4.3.1 ab, wobei wir die am linearen Fall in Unterabschnitt 4.2.3 vorgestellten Änderungen durch die viskose Dämpfung und wie in (4.73) die veränderten Randbedingungen berücksichtigen. Zusätzlich zu den Abkürzungen (4.44) setzen wir noch  $g = g(\theta) = \frac{\gamma}{\theta}$ , können dabei  $0 < g_0 < g < g_1$  auf  $0 \leq t \leq T$  voraussetzen, und schreiben das nichtlineare viskoelastische System als

$$u_{tt} = a u_{xx} + b \theta_x - \mu u_{xxxx} - x \ddot{l} + \gamma u_{txx} \quad (4.74a)$$

$$c \theta_t = d \theta_{xx} + b(u_{tx} + \dot{l}) + g(u_{tx} + \dot{l})^2. \quad (4.74b)$$

Man beachte, daß wir überall die Argumente  $(u_x + l, \theta)$  (bei  $a$  und  $b$ ) bzw. nur  $\theta$  (bei  $b, c$  und  $g$ ) von  $a, b, c, d$  und  $g$  weglassen, und z.B.  $b(u_{tx} + l)$  eine Multiplikation meint. Die Anfangsbedingungen seien wieder so klein, daß für  $0 \leq t \leq T$  nach Sobolev gilt

$$|u_x|, |u_{xx}|, |u_{xxx}|, |\partial_x^4 u|, |u_t|, |u_{tx}|, |u_{txx}|, |u_{tt}|, |\theta_x|, |\theta_{xx}|, |\theta_t| \leq \delta, \quad (4.75)$$

mit einem noch zu bestimmenden  $\delta > 0$ . Beim Ausdifferenzieren von  $E$  beginnen wir mit  $\dot{E}_1$  und erhalten

$$\dot{E}_1 = \int_0^1 u_{ttx} u_{tttx} + \frac{1}{2} a_t u_{txx}^2 + a u_{txx} u_{tttx} + \frac{1}{2} c_t \theta_{tx}^2 + c \theta_{tx} \theta_{ttx} + \mu \partial_x^3 u_t \partial_x^3 u_{tt} dx, \quad (4.76)$$

wobei nun

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{ttx} u_{tttx} dx &= \int_0^1 u_{ttx} (a u_{xx} + b \theta_x - \mu u_{xxxx} - x \ddot{l} + \gamma u_{txx})_{tx} \\ &= \int_0^1 u_{ttx} (a_{tx} u_{xx} + a_t u_{xxx} + \underbrace{(a u_{txx})_x}_{\textcircled{1}} \\ &\quad + b_{tx} \theta_x + b_t \theta_{xx} + b_x \theta_{tx} + \underbrace{b \theta_{txx}}_{\textcircled{2}} - \underbrace{(\mu \partial_x^4 u_t + x \ddot{l})_x}_{\textcircled{3}} + \underbrace{u_{ttxxx}}_{\textcircled{4}}) dx. \end{aligned}$$

Dann gilt weiter

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{ttx} \cdot \textcircled{3} dx &= - [u_{ttx} \underbrace{(\mu u_{txxxx} + x \ddot{l})}_0]_0^1 + \int_0^1 u_{ttxx} (\mu u_{txxxx} + x \ddot{l}) dx \\ &= \mu \underbrace{[u_{ttxx} \mu u_{txxx}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \mu u_{ttxxx} u_{txxx} dx - \underbrace{\int_0^1 u_{ttxx} x \ddot{l} dx}_{\textcircled{a}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\int_0^1 u_{ttx} \cdot \textcircled{4} dx = [u_{ttx} \gamma u_{ttxx}]_0^1 - \gamma \int_0^1 u_{ttxx}^2 dx$$

und

$$\int_0^1 u_{ttx} \cdot \textcircled{1} dx = [a \underbrace{u_{txx} u_{ttx}}_{=0}]_0^1 - \int_0^1 a u_{txx} u_{ttxx} dx. \quad (4.78)$$

Dabei kürzt sich der letzte Term in (4.78) gegen den dritten in (4.76) und der vorletzte Term in (4.77) gegen den letzten in (4.76), wodurch wir schon einmal zwei der Terme mit nicht abgelittenen Koeffizienten los sind. Terme von der Bauart wie  $\textcircled{a}$  werden wir dann im weiteren stets nach Young abschätzen zu

$$\int_0^1 u_{ttxx} x \ddot{l} dx \leq \tau \int_0^1 u_{ttxx}^2 dx + \frac{1}{8\tau} \ddot{l}^2, \quad (4.79)$$

und am Schluß  $\tau$  geeignet wählen. Dies ist dabei die Stelle, an der wir für  $\dot{l} \neq 0$  mit der hier verwendeten Methode im nichtviskosen Fall scheitern, da wir dort kein  $-\gamma \int_0^1 u_{ttxx}^2 dx$  zur Verfügung haben.

Weiter ist zu beachten, daß für die nach  $x$  abgeleiteten Koeffizienten wie in Unterabschnitt 4.3.1 weiterhin gilt  $|a_x| \leq |\sigma_{\varepsilon\varepsilon}| |u_{xx}| + |\sigma_{\varepsilon\theta}| |\theta_x| \leq C\delta$  (mit dem  $\delta$  aus (4.75)), ebenso  $|b_x| \leq C\delta$  usw., und auch  $|a_{xx}| \leq C\delta$  usw., jedoch nicht für die Ableitungen von  $a, b, c, d, g$  nach  $t$ . Für diese erhalten wir

$$\begin{aligned} |a_t| &\leq |\sigma_{\varepsilon\varepsilon}| |u_{tx} + \dot{i}| + |\sigma_{\varepsilon\theta}| |\theta_t| \leq \underbrace{|\sigma_{\varepsilon\varepsilon}|}_{\leq C} \underbrace{|u_{tx}|}_{\leq \delta} + \underbrace{|\sigma_{\varepsilon\varepsilon}|}_{\leq C} |\dot{i}| + \underbrace{|\sigma_{\varepsilon\theta}|}_{\leq C\delta} |\theta_t| \leq C(\delta + |\dot{i}|), \\ |b_t| &\leq |\sigma_{\theta\varepsilon}| (|u_{tx}| + |\dot{i}|) \leq C(\delta + |\dot{i}|), \\ |c_t| &\leq |-\Psi_0'''(\theta)| |\theta_t| \leq C\delta, \quad |d_t| \leq \left| \frac{\kappa}{\theta^2} \right| |\theta_t| \leq C\delta, \quad |g_t| \leq \left| \frac{\gamma}{\theta^2} \right| |\theta_t| \leq C\delta, \end{aligned}$$

wobei wir also für  $|c_t|$  die Zerlegung (2.14) berücksichtigen, und es fügt sich gut, daß nur beim Abschätzen von  $|a_t|$  und  $|b_t|$  die zusätzlichen Terme  $C\dot{i}$  bzw.  $C\ddot{i}$  auftreten, denn  $a_t$  und  $b_t$  stehen stets vor Termen wie  $u_{txx}$ ,  $u_{xxx}$ ,  $\theta_x$  usw., die in (4.75) enthalten sind. Deshalb können wir dann z.B. den zweiten Term in (4.76) abschätzen zu

$$\frac{1}{2} \int_0^1 a_t u_{txx}^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 C\delta u_{txx}^2 + C|\dot{i}| \underbrace{|u_{txx}|}_{\leq \delta} |u_{txx}| dx \leq C\delta \int_0^1 u_{txx}^2 + |\dot{i}|^2 dx.$$

Terme wie  $\int_0^1 \frac{1}{2} c_t \theta_{tx} dx$  könnten wir jedoch nicht so abschätzen, wenn nicht ohnehin  $|c_t| \leq C\delta$  gelten würde. Entsprechendes gilt für die höheren Ableitungen von  $a, b, c, d$  und  $g$ , bzw. für die dahinterstehenden Terme, sodaß wir von nun an kein besonderes Augenmerk mehr auf die Terme mit abgeleiteten Koeffizienten legen werden. Nach diesen Vorbemerkungen fahren wir nun fort mit

$$\begin{aligned} c\theta_{tx}\theta_{ttx} &= (c\theta_t)_{tx} \underbrace{\theta_{tx}}_{\textcircled{5}} - \theta_{tx}(c_{tx}\theta_t + c_t\theta_{tx} + c_x\theta_{tt}), \\ (c\theta_t)_{tx} &= d_{tx}\theta_{xx} + d_t\theta_{xxx} + \underbrace{(d\theta_{txx})_x}_{\textcircled{6}} + b_{tx}(u_{tx} + \dot{i}) + b_t u_{txx} + \underbrace{(b(u_{ttx} + \ddot{i}))_x}_{\textcircled{7}} \\ &\quad + g_{tx}(u_{tx} + \dot{i})^2 + 2g_t(u_{tx} + \dot{i})u_{txx} + \underbrace{(2g(u_{tx} + \dot{i})(u_{ttx} + \ddot{i}))_x}_{\textcircled{8}}, \end{aligned}$$

und mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \textcircled{5} \cdot \textcircled{6} dx &= \underbrace{[\theta_{tx} d\theta_{txx}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 d\theta_{txx}^2 dx, \\ \int_0^1 \textcircled{5} \cdot \textcircled{7} dx &= \underbrace{[\theta_{tx} b(u_{ttx} + \ddot{i})]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \underbrace{b\theta_{txx}(u_{ttx} + \ddot{i})}_{\textcircled{b}} dx. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir zum einen wieder den negativ definiten Term in  $\theta_{txx}^2$ , und addieren wir  $\textcircled{b}$  zu  $\textcircled{2}$ , so bleibt

$$\int_0^1 -\ddot{i}b\theta_{txx} dx \leq \tau b_1 \int_0^1 \theta_{txx}^2 dx + \frac{1}{4\tau} \dot{i}^2 \quad (4.80)$$

übrig. Schließlich gilt noch

$$\int_0^1 \textcircled{5} \cdot \textcircled{8} dx = \underbrace{[\theta_{tx}(2g(u_{tx} + \dot{l})(u_{ttx} + \ddot{l}))]}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 \theta_{txx}(2g(u_{tx} + \dot{l})(u_{ttx} + \ddot{l})) dx,$$

und wir schätzen die ausmultiplizierte rechte Seite wie folgt ab:

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 2gu_{tx}u_{ttx}\theta_{txx} dx \leq C\delta \int_0^1 u_{ttx}^2 + \theta_{txx}^2 dx \quad \text{da } |2gu_{tx}| \leq C\delta \\ & - \int_0^1 2gu_{tx}\ddot{\theta}_{txx} dx \leq C\delta \left( \int_0^1 \theta_{txx}^2 dx + \ddot{l}^2 \right) \\ & - \int_0^1 2g\ddot{l}\ddot{\theta}_{txx} dx \leq C\tau \int_0^1 \theta_{txx}^2 dx + \frac{1}{8\tau}(\dot{l}^2 + \ddot{l}^2) \quad \text{nach Young} \\ & - \int_0^1 2g\dot{l}u_{ttx}\theta_{txx} dx \leq Ci \int_0^1 \theta_{txx}^2 + u_{ttx}^2 dx, \end{aligned} \tag{4.81}$$

und wegen dieser letzten Zeile müssen wir voraussetzen, daß wir hinreichend langsam ziehen ( $|\dot{l}| \leq \delta$ ), um insgesamt zu erhalten

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 & \leq \int_0^1 -\gamma u_{ttx}^2 - d\theta_{txx}^2 dx + C(\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{l}^2) \\ & \quad + C\delta \int_0^1 u_{ttx}^2 + u_{ttx}^2 + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 + \theta_{tx}^2 + \theta_{txx}^2 dx \end{aligned} \tag{4.82}$$

Mit neuer Nummerierung ①,② usw. differenzieren wir nun als nächstes  $E_2$  zu

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 & = \int_0^1 u_{txxx}(u_{ttxx})_x + \frac{1}{2}a_t u_{xxxx}^2 + a u_{xxxx} u_{txxxx} \\ & \quad + \frac{1}{2}c_t \theta_{tx}^2 + c \theta_{xxx} \theta_{txxx} + \mu u_{xxxxx} u_{txxxxx} dx, \end{aligned} \tag{4.83}$$

wobei

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{txxx}(u_{ttxx})_x dx & = [u_{txxx}u_{ttxx}]_0^1 - \int_0^1 \partial_x^4 u (a_{xx}u_{xx} + 2a_x u_{xxx} + a u_{xxxx} + b_{xx}\theta_x \\ & \quad + 2b_x\theta_{xx} + b\theta_{xxx} - \mu\partial_x^6 u + \gamma\partial_x^4 u_t) dx \\ & \leq \int_0^1 -\gamma u_{txxxx}^2 - \underbrace{b\theta_{xxx}u_{txxxx}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{a\partial_x^4 u \partial_x^4 u_t}_{\textcircled{2}} + \mu\partial_x^4 u_t \partial_x^6 u dx \\ & \quad + C\delta \int_0^1 u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 dx, \end{aligned} \tag{4.84}$$

sodaß sich zunächst ② gegen den dritten Term von (4.83) kürzt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu\partial_x^4 u_t \partial_x^6 u dx & = \int_0^1 (\mu\partial_x^4 u_t + x\ddot{l})\partial_x^6 u - x\ddot{l}\partial_x^6 u dx \\ & = \underbrace{[(\mu\partial_x^4 u_t + x\ddot{l})\partial_x^5 u]}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\mu\partial_x^5 u_t \partial_x^5 u}_{\textcircled{3}} + \ddot{l}\partial_x^5 u + x\ddot{l}\partial_x^6 u dx, \end{aligned} \tag{4.85}$$

und ③ kürzen wir gegen den letzten Term in (4.83). Den Term  $\int_0^1 -\ddot{i} \partial_x^5 u dx$  schätzen wir nach Young ab zu  $\int_0^1 -\ddot{i} \partial_x^5 u dx \leq \tau \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx + \frac{1}{4\tau} \ddot{i}^2$ , und aus  $\tilde{F}_2$  werden wir einen  $-u_{xxxxx}^2$  Term erhalten. Jetzt ersetzen wir  $\partial_x^6 u$  unter Verwendung der Impulsbilanz durch

$$\partial_x^6 u = \frac{1}{\mu} (u_{ttxx} - a_{xx} u_{xx} - 2a_x u_{xxx} - a u_{xxxx} - \gamma \partial_x^4 u_t - b_{xx} \theta_x - 2b_x \theta_{xx} - b \theta_{xxx})$$

und schätzen dann wie folgt ab:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 x \ddot{i} \partial_x^6 u dx &= - \int_0^1 x \frac{\ddot{i}}{\mu} (u_{ttxx} - a u_{xxxx} - \gamma \partial_x^4 u_t - b \theta_{xxx}) dx \\ &\quad + \int_0^1 x \frac{\ddot{i}}{\mu} (a_{xx} u_{xx} + 2a_x u_{xxx} + b_{xx} \theta_x + 2b_x \theta_{xx}) dx \\ &\leq \tau \int_0^1 u_{ttxx}^2 + a_1^2 u_{xxxx}^2 + \gamma^2 (\partial_x^4 u_t)^2 + b_1^2 \theta_{xxx}^2 dx + \frac{1}{8\tau} \frac{\ddot{i}^2}{\mu^2} \\ &\quad + C\delta \int_0^1 u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$

Schließlich verfahren wir mit dem vorletzten Term in (4.83) wie mit dem entsprechenden Term in (4.76), d.h. wir berechnen

$$c\theta_{xxx}\theta_{txxx} = (c\theta_t)_{xxx}\theta_{xxx} - \theta_{xxx}(c_{xxx}\theta_t + 3c_{xx}\theta_{tx} + 3c_x\theta_{txx}),$$

und weiter

$$\begin{aligned} \int_0^1 (c\theta_t)_{xxx}\theta_{txxx} dx &= \underbrace{[\theta_{xxx}(c\theta_t)_{xx}]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \left\{ \theta_{xxxx} (d_x\theta_{xx} + d\theta_{xxx} + b_x(u_{tx} + \dot{i}) + bu_{txx} \right. \\ &\quad \left. + g_x(u_{tx} + \dot{i})^2 + 2g(u_{tx} + \dot{i})u_{txx})_x \right\} dx \\ &= - \int_0^1 \left\{ \theta_{xxxx} (d_{xx}\theta_{xx} + 2d_x\theta_{xxx} + d\theta_{xxxx} + b_{xx}(u_{tx} + \dot{i}) + 2b_x u_{txx} + \underbrace{bu_{txxx}}_{\textcircled{5}} \right. \\ &\quad \left. + g_{xx}(u_{tx} + \dot{i})^2 + 4g_x(u_{tx} + \dot{i})u_{txx} + 2gu_{txx}u_{txx} + 2g(u_{tx} + \dot{i})u_{txxx}) \right\} dx. \quad (4.86) \end{aligned}$$

Damit erhalten den gewünschten Term  $-\int_0^1 d\theta_{xxxx}^2 dx$ , und den Term  $\theta_{xxxx} \cdot \textcircled{5}$  integrieren wir partiell zu

$$- \int_0^1 \theta_{xxxx} bu_{txxx} dx = - \underbrace{[\theta_{xxx} bu_{txxx}]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \theta_{xxx} b_x u_{txxx} + \theta_{xxxx} b \partial_x^4 u_t dx,$$

wobei der letzte Term sich gegen ① in (4.84) kürzt. Mit den beiden letzten Termen in (4.86) verfahren wir dann wie in (4.81), d.h.

$$\begin{aligned} - \int_0^1 2gu_{txx}u_{txx}\theta_{xxxx} dx &\leq C\delta \int_0^1 u_{txx}^2 + \theta_{xxxx}^2 dx, \quad \text{da } |2gu_{txx}| \leq C\delta, \\ - \int_0^1 2g(u_{tx} + \dot{i})u_{txxx}\theta_{xxxx} dx &\leq (C\delta + Ci) \int_0^1 u_{txxx}^2 + \theta_{xxxx}^2 dx, \end{aligned}$$

sodaß wir auch hier wieder  $|\dot{l}| \leq \delta$  benötigen. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &\leq \int_0^1 -\gamma(\partial_x^4 u_t)^2 - d\theta_{xxxx}^2 dx + C(\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{\dot{l}}^2) \\ &\quad + C\delta \int_0^1 u_{ttxx}^2 + (\partial_x^5 u)^2 + a_1^2 u_{xxxx}^2 + \gamma^2 (\partial_x^4 u_t)^2 + b_1^2 \theta_{xxx}^2 \\ &\quad + C\delta \int_0^1 u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 + u_{tx}^2 + u_{ttx}^2 + u_{ttxx}^2 dx. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Aus  $\dot{E}_1$  und  $\dot{E}_2$  haben wir also die negativ definiten Terme

$$-\int_0^1 \gamma u_{ttxx}^2 + \gamma u_{ttxx}^2 + d_0 \theta_{ttx}^2 + d_0 \theta_{xxxx}^2 dx,$$

und nach Poincaré gilt

$$\begin{aligned} -\gamma \int_0^1 u_{ttxx}^2 dx &\leq -\frac{\gamma}{2} \int_0^1 u_{ttxx}^2 + u_{ttx}^2 dx, \\ -d_0 \int_0^1 \theta_{ttx}^2 dx &\leq -\frac{d_0}{2} \int_0^1 \theta_{ttx}^2 + \theta_{tx}^2 dx, \\ -\gamma \int_0^1 (\partial_x^4 u_t)^2 dx &\leq -\frac{\gamma}{2} (\partial_x^4 u_t)^2 + u_{ttxx}^2 + u_{ttx}^2 + u_{tx}^2 dx, \\ -d_0 \int_0^1 (\partial_x^4 \theta)^2 dx &\leq -\frac{d_0}{2} \int_0^1 (\partial_x^4 \theta_x)^2 + \theta_{xxx}^2 + \theta_{xx}^2 + \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

Beim Erzeugen eines  $-\theta_t^2$ -Terms erhalten wir dann

$$-\frac{d_0}{4} \int_0^1 \theta_{tx}^2 \leq \frac{d_0}{4} \left( \int_0^1 \theta_t dx \right)^2 - \frac{d_0}{4} \int_0^1 \theta_t^2 dx,$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 \theta_t dx \right)^2 &= \left( \int_0^1 \frac{1}{c} (d\theta_{xx} + b(u_{tx} + \dot{l}) + g(u_{tx} + \dot{l})^2) dx \right)^2 \\ &\leq \left( \left[ \frac{d}{c} \theta_x + \frac{b}{c} u_t \right]_0^1 + \int_0^1 \underbrace{\left| \frac{d_x c - d c_x}{c^2} \right|}_{\leq C\delta} \theta_x + \underbrace{\left| \frac{b_x c - b c_x}{c^2} \right|}_{\leq C\delta} u_t dx + \int_0^1 \left| \frac{b}{c} \dot{l} \right| + C |u_{tx}^2 + \dot{l}^2| dx \right)^2 \\ &\leq C\delta \int_0^1 \theta_x^2 + u_t^2 + u_{tx}^2 dx + C\dot{l}^2. \end{aligned}$$

Das Differenzieren von  $F_2$  liefert schließlich

$$\dot{F}_2 = \int_0^1 -u_{ttxx}^2 - u_{xxx} u_{ttxxx} dx,$$

wobei

$$-\int_0^1 u_{xxx} u_{ttxxx} dx = -[u_{xxx} \underbrace{u_{ttxxx}}_{=0}]_0^1 + \int_0^1 u_{xxx} (a_{xx} u_{xx} + 2a_x u_{xxx} + a u_{xxxx} + b_{xx} \theta_x + 2b_x \theta_{xx} + b \theta_{xxx} - \mu \partial_x^6 u + \gamma \partial_x^4 u_t) dx,$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\int_0^1 -\mu u_{xxxx} \partial_x^6 u dx &= \int_0^1 (-\mu u_{xxxx} - x\ddot{l}) \partial_x^6 u + x\ddot{l} \partial_x^6 u dx \\
&= - \underbrace{[(\mu u_{xxxx} + x\dot{l}) \partial_x^5 u]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \mu (\partial_x^5 u)^2 + \ddot{l} \partial_x^5 u + x\ddot{l} \partial_x^6 u dx \\
&\geq \int_0^1 \mu (\partial_x^5 u)^2 dx - \tau \int_0^1 (\partial_x^5 u)^2 dx - \frac{1}{4\tau} \dot{l}^2 \\
&\quad - \tau \int_0^1 u_{ttxx}^2 + (\partial_x^5 u)^2 + a_1^2 u_{xxxx}^2 + \gamma^2 (\partial_x^4 u_t)^2 + b_1^2 \theta_{xxx}^2 dx \\
&\quad - C\delta \int_0^1 u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 dx.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.73) folgt dann insgesamt

$$\begin{aligned}
-\eta \dot{F}_2 &\leq -\eta \bar{\beta}_1 \int_0^1 u_{xxxx}^2 dx - \eta \lambda \mu \int_0^1 (\partial_x^5 z)^2 dx \\
&\quad + \eta \int_0^1 u_{ttxx}^2 dx + \eta \int_0^1 |b \theta_{xxx} u_{xxxx}| dx + C \dot{l}^2 \\
&\quad + \tau \int_0^1 u_{ttxx}^2 + (\partial_x^5 u)^2 + a_1^2 u_{xxxx}^2 + \gamma^2 (\partial_x^4 u_t)^2 + b_1^2 \theta_{xxx}^2 \\
&\quad + C\delta \int_0^1 u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + \theta_x^2 + \theta_{xx}^2 dx, \tag{4.88}
\end{aligned}$$

und nach Poincaré erhalten wir die weiteren negativ definiten Terme

$$-\eta \lambda \mu (\partial_x^5 u)^2, -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{2} u_{xxxx}^2, -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{2} u_{xxx}^2, -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{2} u_{xx}^2,$$

Es bleiben der dritte und vor allem der vierte Term von  $-\eta \dot{F}_2$  abzuschätzen. Letzteres geschieht analog zu (4.66) nach Young gemäß

$$\begin{aligned}
&-\frac{\eta \bar{\beta}_1}{4} \int_0^1 u_{xxx}^2 dx - \frac{d_0}{4} \int_0^1 \theta_{xxxx}^2 dx + \eta \left| \int_0^1 b \theta_{xxx} u_{xxxx} dx \right| \\
&\leq \left( -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{4} + \eta \tau b_1^2 \right) \int_0^1 u_{xxx}^2 dx + \left( -\frac{d_0}{4} + \frac{\eta b_1^2}{4\tau} \right) \int_0^1 \theta_{xxxx}^2 dx \\
&\leq -\frac{\eta \bar{\beta}_1}{8} \int_0^1 u_{xxx}^2 dx - \frac{d_0}{8} \int_0^1 \theta_{xxxx}^2 dx,
\end{aligned}$$

wenn wir zuerst  $\tau$  so wählen, daß  $b_1^2 \tau \leq \bar{\beta}_1/8$ , und dann  $\eta$  so, daß  $\eta b_1^2/(4\tau) \leq d_0/8$ . Addieren wir nun (4.82), (4.87) und (4.88), so erhalten wir nach geeigneter Wahl von  $\delta$  und der verschiedenen  $\tau$  die gesuchte Abschätzung

$$\dot{E} \leq -\nu E + C(\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \dddot{l}^2)$$

für ein  $\nu > 0$  und damit (4.71) nach der Gronwallschen Ungleichung.  $\square$



Man beachte nun noch, daß wir im Unterschied zum nichtviskosen Fall hier an keiner Stelle die Terme der thermischen Dissipation zum Erzeugen der negativ definiten quadratischen Terme in Ableitungen von  $u$  verwendet haben, sondern diese allein aus der viskosen Dämpfung, aus der Grenzflächenenergie und aus  $\tilde{F}_2$  erhalten. Kurz gesagt schätzen wir nirgendwo  $u$ -Terme durch  $\theta$ -Terme ab. Damit können wir für  $(P_\gamma)$  zum einen die zusätzliche Bedingung  $l \neq 0$  für das Stabilitätsgebiet der trivialen stationären Lösungen fallenlassen. Zum zweiten notieren wir im nächsten Unterabschnitt einen zu Satz 4.5 analogen Satz für das isotherme viskoelastische Problem, wobei wir  $\theta$  wieder als Parameter auffassen.

#### 4.4.1 Stabilität trivialer stationärer Lösungen, isotherm

Mit  $\theta$  als Parameter sei  $\mathcal{S}(\theta) := \{l \in \mathbb{R} : (l, \theta) \in \mathcal{S}\}$ , und wir betrachten die eine Ableitungsordnung schwächeren Energiefunktionale

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \int_0^1 u_{tt}^2 + \sigma_{\varepsilon\varepsilon}(u_x + l, \theta)u_{tx} + \mu u_{txx}^2 dx, \\ E_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 u_{txx}^2 + \sigma_{\varepsilon\varepsilon}(u_x + l, \theta)u_{xxx} + \mu u_{xxx}^2 dx, \\ F_2 &= \int_0^1 -u_{xx}u_{txx} dx. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 3.7 sind  $E_1, E_2$  und  $F_1$  wohldefiniert entlang von Lösungen von (3.33), und wir erhalten

**Satz 4.6** *Es sei  $l \in C^3([0, \infty))$  mit  $l(0) \in \mathcal{S}(\theta)$ ,  $\text{dist}(l(0), \partial\mathcal{S}(\theta)) =: \beta$ . Ferner seien  $|\dot{l}|$  und  $\|u|_{t=0}\|_*$  hinreichend klein, wobei*

$$\|u\|_*^2 = \|u\|_{H^4}^2 + \|u_t\|_{H^2}^2 + \|u_{tt}\|^2,$$

und  $u$  die zugehörige Lösung von (3.33). Dann existiert ein  $0 < T \leq \infty$ , sodaß für  $0 \leq t \leq T$

$$\text{dist}([\min(u_x + l), \max(u_x + l)], \partial\mathcal{S}(\theta)) \geq \beta/2,$$

und es existiert ein  $\eta > 0$ , sodaß auf  $0 \leq t \leq T$  für  $E := E_1 + E_2 - \eta F_2$  die Ungleichung  $r\|u\|_{H^4} \leq E$  mit einem  $r > 0$  gilt, sowie die Abschätzung

$$E(t) \leq E(0)e^{-\nu t} + C \int_0^t (\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{\dot{l}}^2)e^{-\nu(t-\tau)} d\tau$$

für ein  $\nu > 0$ , und damit

$$\|u\|_{H^4} \leq \frac{1}{r} \left( E(0)e^{-\nu t} + C \int_0^t (\dot{l}^2 + \ddot{l}^2 + \ddot{\dot{l}}^2)e^{-\nu(t-\tau)} d\tau \right).$$

Im Falle  $\dot{l} \equiv 0$  können wir dabei die Anfangsbedingungen so klein wählen, daß  $T = \infty$  gilt, und  $\|u\|_*^2$  exponentiell gegen Null konvergiert.

**Bemerkung 4.10** Die letzte Aussage können wir für den isothermen Fall auch direkt erhalten, indem wir bei festem  $\theta$  analog zu Abschnitt 4.1 die Linearisierung um eine triviale stationäre Lösung betrachten, da wir nicht mehr den störenden Null-Eigenwert der konstanten  $\theta$ -Verschiebungen erhalten.  $\square$

## 5 Nichttriviale stationäre Lösungen

In diesem Kapitel fassen wir die in stationären Lösungen zu (P) stets konstante Temperatur  $\theta$  zusätzlich zu  $l$  als Parameter auf, und diskutieren die Existenz sowie die Eigenschaften nichttrivialer Lösungen der parameterabhängigen Randwertaufgabe

$$\mu u_{xxxx} - \sigma_\varepsilon(u_x + l, \theta) u_{xx} = 0, \quad (5.1a)$$

$$u(0) = u(1) = u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0 \quad (5.1b)$$

in Abhängigkeit von  $\theta$  und  $l$ . In Abschnitt 5.1 schreiben wir dazu (5.1) in eine Randwertaufgabe zweiter Ordnung mit einem nichtlokalen Term um und zeigen, daß es Kurven in der  $\theta$ - $l$  Ebene gibt, an denen jeweils zwei Äste nichttrivialer Lösungen von (5.1) aus dem trivialen Lösungsast entspringen. Diese Bifurkationen untersuchen wir lokal, wobei sich herausstellt, daß die Lösungen auf den verzweigenden Ästen typischerweise instabil sind.

In Abschnitt 5.2 überführen wir (5.1) in ein System zweier Integralgleichungen, der „Time-Map“ und der „Dehnungs-Map“, und erhalten eine intuitive Parametrisierung der Menge (notiert nach Rücksubstitution von (2.6))

$$G_{\text{nt}}(\theta, l) := \{\text{Lösungen } u \neq xl \text{ von (5.1) zu den gegebenen Parametern } l, \theta\}$$

durch Paare  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \in \mathbb{R}^2$ , sowie insgesamt ein globales Bild der Menge der nichttrivialen Lösungen von (5.1). Die Time-Map und die Dehnungs-Map sind für jedes  $\theta$  über einer Menge  $\Xi(\theta)$  zulässiger Paare  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  von Randverzerrungen definiert, und diese Mengen werden in Unterabschnitt 5.2.1 dargestellt, wobei wir in natürlicher Weise auf den Begriff der Maxwell-Linie geführt werden. Anschließend werden im Unterabschnitt 5.2.2 die Time-Map und die Dehnungs-Map analytisch und numerisch untersucht, wobei wir auch den Zusammenhang zum Bifurkationsproblem in Abschnitt 5.1 verdeutlichen. In Unterabschnitt 5.2.3 fassen wir hieraus erhaltene numerische Beobachtungen zur globalen Bifurkation zusammen. Eine analytische Untersuchung des Bifurkationsproblems und der Stabilität der abzweigenden Lösungen mittels der Time-Map in einem abstrakten Rahmen findet sich in [Sch84]. Der dabei verwendete Leray-Schauder-Abbildungsgrad liegt jedoch jenseits der Methoden der vorliegenden Arbeit, und es erschien uns zunächst wichtiger, unter Verwendung des deutlich einfacheren Ansatzes in Abschnitt 5.1 die Bifurkationen lokal zu verstehen. In Abschnitt 5.3 folgen dann einige konkrete numerische Beispiele für nichttriviale stationäre Lösungen. Der Rest des Kapitels befaßt sich schließlich eingehend mit der Maxwell-Linie, die direkt mit Lösungen des stationären Problems im Fall  $\mu = 0$  zusammenhängt, die bei festem  $\theta$  die freie Energie des Drahtes minimieren. Dies ist in Abschnitt 5.4 dargelegt, und bildet den heuristischen Ausgangspunkt für die Suche nach Lösungen mit minimaler freier Energie im Fall  $\mu > 0$ . Die entsprechenden Ergebnisse finden sich in Abschnitt 5.5, sie stammen aus [CGS84]. Damit erhalten wir in Abschnitt 5.6 aufbauend auf Abschnitt 3.3 und der freien Energie als Liapunov-Funktion, eine weitergehende Charakterisierung der Asymptotik im isothermen Fall.

Für das nichtisotherme Problem (P) betrachten wir dann in Kapitel 6 die Liapunov-Funktion  $E^{(i)} - \Upsilon$ , vgl. Abschnitt 2.4, und bei der Untersuchung des entsprechenden Variationsproblems werden wir auf die Methodik aus Abschnitt 5.2 zurückkommen.

## 5.1 Bifurkation aus den trivialen stationären Lösungen

### 5.1.1 Das Bifurkationsproblem

Um zunächst Bifurkationen aus den trivialen stationären Lösungen lokal zu untersuchen verwenden wir eine Idee aus [FS90]: wir schreiben (5.1) in eine Randwertaufgabe zweiter Ordnung um, und studieren diese als parameterabhängige Gleichung  $F(w, \lambda) = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , auf dem Banachraum

$$X = \{w \in C^2[0, 1] : w(0) = w(1) = 0\}, \quad \|w\|_X := \|w\|_\infty + \|w'\|_\infty + \|w''\|_\infty.$$

Dazu setzen wir

$$w = u'',$$

und können  $u$  und  $u'$  aus  $w$  wegen den Randbedingungen (5.1b) eindeutig zurückgewinnen mit

$$u(x) = \int_0^x \int_0^\xi w(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} d\xi - x \left( \int_0^1 \int_0^\xi w(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} d\xi \right) =: (Bw)(x)$$

und

$$u'(x) = \int_0^x w d\xi - \left( \int_0^1 \int_0^\xi w(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} d\xi \right) =: (\partial_x^{-1} w)(x).$$

Insbesondere verwenden wir  $B$  als stetigen Isomorphismus zwischen den Banachräumen  $Y = \{f \in C^0[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$ ,  $\|f\|_Y = \|f\|_\infty$  und  $X$ . Im weiteren reduzieren wir nun das eigentlich zweiparametrische Bifurkationsproblem (in  $l$  und  $\theta$ ) in ein einparametrisches mit  $\lambda$  als Bifurkationsparameter.

Wir entwickeln  $\sigma_\varepsilon(\varepsilon + l, \theta)$  um  $l$ , d.h.  $\sigma_\varepsilon(\varepsilon + l, \theta) = \sigma_\varepsilon(l, \theta) + R(\varepsilon + l, \theta)$  mit

$$R(\varepsilon + l, \theta) = \mathcal{O}(\varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad (5.2)$$

und setzen<sup>1</sup>

$$\lambda(l, \theta) = -\frac{1}{\mu} \sigma_\varepsilon(l, \theta) \quad \text{und} \quad \tilde{S}(w, l, \theta) = -\frac{1}{\mu} R(\partial_x^{-1} w + l, \theta).$$

Beim Studium der Bifurkationen werden wir dann stets eine  $C^1$ -Kurve  $\mathcal{C} : [-1 : 1] \ni r \mapsto g(r) = (g_1(r), g_2(r)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  betrachten, sodaß  $\lambda(g_1(r), g_2(r))$  in  $r = 0$  eine Höhenlinie von  $\lambda = k^2 \pi^2$  überquert, und wir denken uns weiter  $\mathcal{C}$  stets so, daß gilt

$$\frac{d}{dr} \lambda(g_1(r), g_2(r)) = -\frac{1}{\mu} (\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(g_1(r), g_2(r)) \cdot g_1'(r) + \sigma_{\varepsilon\theta}(g_1(r), g_2(r)) \cdot g_2'(r)) > 0 \quad (5.3)$$

für alle  $r \in [0, 1]$ . Zur Anschauung diene hierbei die Abb.5.2(a) auf Seite 87. Damit bekommen wir entlang  $\mathcal{C}$  stets eindeutige Auflösungen  $l = l(\lambda)$  und  $\theta = \theta(\lambda)$  und wir schreiben

$$S(w, \lambda) := \tilde{S}(w, l(\lambda), \theta(\lambda)),$$

sodaß dieses  $S$  also von der Wahl von  $\mathcal{C}$  abhängt, jedoch nicht der Typ der Bifurkation, was wir in Unterabschnitt 5.1.3 (Satz 5.2) zeigen werden. Zwei spezielle Wahlen von  $\mathcal{C}$  sind offensichtlich

<sup>1</sup>die „-“ fügen wir ein, um im weiteren eine gewisse Standardform für Randwertaufgaben zweiter Ordnung zu erhalten

- (a)  $\theta = \theta_0$  fest,  $S(w, \lambda) = \tilde{S}(w, l(\lambda), \theta_0)$  wobei wir  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l(r), \theta_0) \cdot g_1(r) > 0$  benötigen,
- (b)  $l = l_0$  fest,  $S(w, \lambda) = \tilde{S}(w, l_0, \theta(\lambda))$ , in welchem Falle  $\theta$  entlang  $\mathcal{C}$  fallen muß ( $g_2'(r) < 0$ ), denn  $\sigma_{\varepsilon\theta}(l, \theta) = \Psi_1''(l) > 0 \quad \forall (l, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Genau der Fall  $l = 0$  fest wird in [FS90] untersucht.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun (5.1) schreiben als

$$\tilde{F}(w, \lambda) = w'' + \lambda w + S(w, \lambda)w = 0 \quad \text{in } Y, \quad (5.4)$$

und wegen der Bijektivität von  $B$  gilt die äquivalente Formulierung

$$\begin{aligned} F(w, \lambda) &= B\tilde{F}(w, \lambda) \\ &= w + \lambda Bw + BS(w, \lambda)w \quad \text{in } X. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wegen (5.2) und (explizit)  $\|\partial_x^{-1}w\|_X \leq \|w\|_X$  gilt

$$S(w, \lambda)w = \mathcal{O}(\|w\|_X^2)_{\|w\|_X \rightarrow 0}$$

und damit  $F \in C^1(X \times \mathbb{R}, X)$  mit

$$D_w F(0, \lambda)[h] = h + \lambda Bh =: A(\lambda)h,$$

und  $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, X)$  ist Fredholmsch mit Index Null nach [Mie96], Proposition 3.2. Um Verzweigungen aus dem trivialen Lösungsast  $(0, \lambda)$  von (5.5) zu erhalten, benötigen wir nun Werte für  $\lambda$ , sodaß  $A(\lambda)h = 0$  nichttriviale Lösungen in  $X$  hat. Wegen der Bijektivität von  $B$  ist dies gerade äquivalent zu

$$h'' + \lambda h = 0, \quad h(0) = h(1) = 0$$

und als einzige Lösungen erhalten wir

$$\lambda = \lambda_k = k^2\pi^2, \quad h = h_k(x) = \sin(k\pi x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Zur Abkürzung setzen wir  $\phi_k(x) = \sin(k\pi x)$  und erhalten im ursprünglichen Problem mittels  $B\phi_k = -\frac{1}{k^2\pi^2}\phi_k$ , daß die  $\phi_k$  Eigenfunktionen von  $A(\lambda)$  sind zu den Eigenwerten  $\omega_k(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{k^2\pi^2}$ . Es gilt  $\omega_k(\lambda_k) = 0$ , und dieser Eigenwert ist algebraisch einfach mit  $N(A(\lambda_k)) = \text{span}\{\phi_k\}$  und  $\phi_k \notin W(A(\lambda_k) = X \setminus \text{span}\{\phi_k\}$ . Mit  $\omega_k'(\lambda_k) = -\frac{1}{k^2\pi^2}$  erhalten wir damit aus Satz A.11 über die einfache Eigenwertverzweigung die folgende als Lemma festgehaltene Aussage.

**Lemma 5.1** *Es ist  $(0, \lambda_k)$  ein Bifurkationspunkt für (5.5), und die abzweigenden Lösungen liegen auf einem eindimensionalen Lösungsast*

$$\mathcal{C}_k : (-\delta, \delta) \ni \alpha \mapsto (\alpha\phi_k + h(\alpha), \Lambda(\alpha)), \quad (5.6)$$

wobei  $h : (-\delta, \delta) \rightarrow X \setminus \text{span}\{\phi_k\}$  differenzierbar ist mit  $h(0) = h'(0) = 0$ .

**Bemerkung 5.1** Für unser Beispiel- $\Psi$  können wir explizit Kurven von Punkten  $(l, \theta)$  mit  $\lambda(l, \theta) = k^2\pi^2$  in der  $\theta$ - $l$ -Ebene berechnen: Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon(\varepsilon + l, \theta) &= \alpha_1(\theta - \theta_M) - 3\alpha_2(\varepsilon + l)^2 + 5\alpha_3(\varepsilon + l)^4 \\ &= \underbrace{\alpha_1(\theta - \theta_M) - 3\alpha_2l^2 + 5\alpha_3l^4}_{=\sigma_\varepsilon(l, \theta) = -\mu\lambda} \\ &\quad - \underbrace{3\alpha_2(2\varepsilon l + \varepsilon^2) + 5\alpha_3(4\varepsilon l^3 + 6\varepsilon^2l^2 + 4\varepsilon^3l + \varepsilon^4)}_{=R(\varepsilon+l, \theta)}, \end{aligned}$$

und wir können die Bedingung

$$\lambda(l, \theta) = \frac{1}{\mu}(3\alpha_2l^2 - 5\alpha_3l^4 - \alpha_1(\theta - \theta_M)) \stackrel{!}{=} k^2\pi^2 \quad (5.7)$$

z.B. nach  $l = l^{(k)}(\theta)$  (mit im Unterschied zu den Kurven  $l_1, l_2$  hochgestellten Index) auflösen zu

$$l = \pm\sqrt{y} \quad \text{mit} \quad y = \frac{3\alpha_2}{10\alpha_3} \pm \sqrt{\left(\frac{3\alpha_2}{10\alpha_3}\right)^2 - \frac{\alpha_1}{5\alpha_3}(\theta_0 - \theta_M) - \frac{\mu}{5\alpha_3}k^2\pi^2} \quad (5.8)$$

oder nach  $\theta = \theta^{(k)}(l)$  zu

$$\theta^{(k)} = \frac{1}{\alpha_1}(3\alpha_2l^2 - 5\alpha_3l^4 - \mu k^2\pi^2) + \theta_M. \quad (5.9)$$

Die Isohöhen  $l^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  für  $\lambda = \lambda_k = k^2\pi^2$  verlaufen im Innern des durch  $\pm l_1, \pm l_2$  berandeten Gebiets, und zwar (wenn wir (2.12) entsprechend  $\mu = 2 \cdot 10^{-10}$  verwenden) wegen  $\frac{\mu}{5\alpha_3} \sim 1.6 \cdot 10^{-17}$  sehr dicht an  $\pm l_1, \pm l_2$ , und entfernen sich mit wachsendem  $k$  nur sehr langsam von  $\pm l_1, \pm l_2$ . Für z.B.  $l = 0$  erhalten wir aus (5.9), daß bereits 5.2K unter  $\theta_M$  der Ast zu  $k = 10^6$  verzweigt. Für größere  $\mu$  entfernen sich die Kurven für  $\lambda_k$  voneinander und von  $\pm l_1, \pm l_2$  (die Steigung von  $\lambda$  wird flacher), und für  $\mu \rightarrow 0$  fallen sie alle zusammen auf der durch  $\pm l_1, \pm l_2$  gegebene Kurve. Numerisch scheint es für  $\mu$  in der gegebenen Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-10})$  und moderate  $k$  hoffnungslos, zwischen den verschiedenen Kurven von Bifurkationspunkten zu unterscheiden. In Abb.5.1 sind die Kurven zu  $k = 10^6$  und  $k = 1.5 \cdot 10^6$  zusammen mit (gepunktet)  $\pm l_1$  und  $\pm l_2$  dargestellt. □

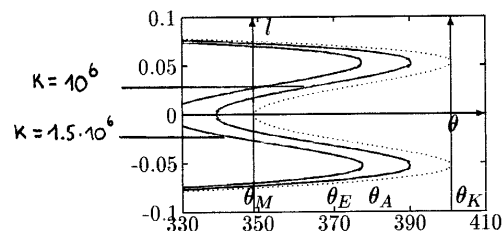


Abbildung 5.1: Kurven von Bifurkationspunkten,  $k = 10^6, 1.5 \cdot 10^6$ ,  $\mu = 2 \cdot 10^{-10}$ .

### 5.1.2 Bemerkungen zur globalen Bifurkation I

In [FS90] wird (5.5) für den Spezialfall  $l \equiv 0$  fest mittels Theorem 4.11 aus [GR85] behandelt, in welchem der als Rabinowitz'sche Alternative bekannte globale Bifurkationssatz, siehe z.B. [GR85], Theorem 3.2, auf Randwertprobleme der folgenden Art angewendet ist:

$$\begin{aligned} Lu := -(p(x)u')' + q(x)u &\stackrel{!}{=} \lambda a(x)u + h(x, u, u', \lambda), & x \in (0, \pi) \\ a_0 u(0) + b_0 u'(0) &= 0, \\ a_1 u(\pi) + b_1 u'(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

mit

- (i)  $p \in C^1[0, \pi]$ ,  $q, a \in C^0[0, \pi]$ ,  $p(x), q(x) > 0 \forall x \in [0, \pi]$ ,
- (ii)  $(a_0^2 + b_0^2)(a_1^2 + b_1^2) > 0$ , (separierte Randbedingungen)
- (iii)  $h \in C^0(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$  mit  $h(x, \xi, \eta, \lambda) = o(|(\xi, \eta)|)$  für  $(\xi, \eta) \rightarrow 0$ , gleichmäßig in beschränkten  $\lambda$ -Intervallen.

In der Rabinowitz'schen Alternative (hier nach [GR85], Theorem 3.2) wird dabei auf einem reellen Banachraum  $X$  und für  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$u = G(u, \lambda) := \lambda Lu + H(u, \lambda) \quad (5.11)$$

betrachtet, wobei  $L$  linear und kompakt sei und  $H$  kompakt mit  $H(u, \lambda) = o(\|u\|_X)$  für  $\|u\|_X \rightarrow 0$  gleichmäßig in beschränkten  $\lambda$ -Intervallen. Ferner besitze (5.11) die Familie  $\{(0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$  trivialer stationärer Lösungen. Die Rabinowitz'sche Alternative besagt dann, daß ein aus einem Bifurkationspunkt  $(0, \bar{\lambda})$  von (5.11) entspringender Ast von nichttrivialen Lösungen von (5.11) entweder unbeschränkt ist in  $X \times \mathbb{R}$ , oder zur Familie der trivialen Lösungen zurückkehrt in einem Punkt  $(0, \hat{\lambda})$  mit  $\hat{\lambda} \neq \bar{\lambda}$ .

Theorem 4.11 aus [GR85] sagt nun gerade aus, daß für die abzweigenden Äste von (5.10) stets die erste Alternative gilt.

Dabei beachte man, daß in (5.10) die Nichtlinearität, –bei uns nichtlokal in der Form  $S(w, \lambda)w$ , in der lokalen Form  $h(x, w, w', \lambda)$  vorausgesetzt wird. Friedman und Sprekels merken jedoch an, daß sich der Beweis von Theorem 4.11 in [GR85] auf den Fall (5.4) übertragen läßt, allerdings ohne diesen auszuführen.

Damit erhalten sie folgendes Ergebnis: Für  $k = 1, 2, \dots$  und  $\nu \in \{+1, -1\}$  sei noch

$$H_k^\nu = \{f \in X : f \text{ hat genau } k+1 \text{ einfache Nullst. in } [0, 1] \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} f(x) = \nu \},$$

dann gilt

([FS90], Satz 2.2) Für  $k = 1, 2, \dots$  und  $\nu \in \{+1, -1\}$  verzweigt bei  $(0, \lambda_k)$  ein unbeschränkter und zusammenhängender Ast  $C_k^\nu \subset (C^2[0, 1] \times \mathbb{R})$  von Lösungen zu (5.4) mit

- (i)  $w \in H_k^\nu$  für  $(w, \lambda) \in C_k^\nu$  und  $\lambda \neq \lambda_k$ .
- (ii) für  $\lambda$  hinreichend dicht bei  $\lambda_k$ ,  $\lambda \neq \lambda_k$  und  $(w, \lambda) \in C_k^\nu$  hat  $\partial_x^{-1}w$  genau  $k$  einfache Nullstellen in  $[0, 1]$ .

Der bei  $(0, \lambda_k)$  verzweigende Ast  $\mathcal{C}_k$  wird also unterteilt in zwei Teile  $\mathcal{C}_k^+$  und  $\mathcal{C}_k^-$ , auf denen die Lösungen in einer punktierten Umgebung von  $x = 0$  jeweils positives bzw. negatives Vorzeichen haben, und die Kernaussage ist, daß diese beiden Äste unbeschränkt sind in  $X \times \mathbb{R}$  und global die Eigenschaft (i) haben. Die lokale Aussage (ii) ist davon unabhängig und folgt bei uns unmittelbar aus der Darstellung (5.6) und  $h(0) = h'(0) = 0$ . Ebenso folgt (i) bei uns für hinreichend kleine  $\alpha$ . Tatsächlich ist  $w$  sogar periodisch mit Periode  $\frac{2}{k}$ , was wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

Der Grund, warum [FS90] (für  $l = l_0$  fest,  $l_0 = 0$ ) unbeschränkte bifurkierende Äste erhalten, liegt nach unserem Erachten darin, daß die Gleichung  $\lambda(l_0, \cdot) = k^2\pi^2$  nur genau eine Lösung  $\theta = \theta_k$  besitzt, vgl. (5.9) und Abb.5.1, und es geht  $\lambda(0, \theta)$  für  $\theta \rightarrow -\infty$  (was physikalisch sinnlos ist) gegen unendlich. Für  $\theta > 0$  ist jedoch  $\lambda = -\frac{1}{\mu}\sigma_\varepsilon(0, \theta)$  nach oben beschränkt durch  $-\frac{1}{\mu}\sigma_\varepsilon(0, 0)$ , und man beachte, daß die Hilfskonstruktion  $\lambda$  stets über der Menge der physikalisch relevanten Parameterwerte  $(l, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , –strenggenommen sogar über  $(-1, \infty) \times \mathbb{R}_+$ , betrachtet werden sollte.

Für den Fall  $\theta$  fest und  $l$  als Bifurkationsparameter folgern wir schließlich in Unterabschnitt 5.2.3, daß Äste, die bei einem Bifurkationspunkt  $(l_k^{(1)}, \theta)$  mit  $\lambda(l_k^{(1)}, \theta) = k^2\pi^2$  starten, in einem anderen Bifurkationspunkt  $(l_k^{(2)}, \theta)$  mit  $\lambda(l_k^{(2)}, \theta) = k^2\pi^2$  wieder verschwinden<sup>2</sup>. Notwendig hierfür ist a-priori, daß die Gleichung

$$\lambda(\cdot, \theta) = -\frac{1}{\mu}\sigma_\varepsilon(\cdot, \theta) = k^2\pi^2 \quad (5.12)$$

mehr als eine Lösung  $l$  hat. Dies ist bei uns erfüllt denn es hat (5.12) entweder keine (z.B. für  $\theta > \theta_K$  für beliebige  $k$  oder bei kleineren  $\theta$  für  $k$  größer einem  $k_{\max}(\theta, \mu)$ ), oder zwei oder vier Lösungen, vgl.(5.8) und wiederum Abb.5.1. Im nächsten Unterabschnitt kehren wir jedoch zunächst zur lokalen Untersuchung der Bifurkationen zurück.

### 5.1.3 Lokale Theorie und Berechnung der Bifurkation

Man beachte, daß wir mit Lemma 5.1 eine typische Situation in der Theorie der dynamischen Systeme und der Bifurkationstheorie vorgefunden haben, die man in etwa zusammenfassen könnte als

*Verlust der Stabilität der trivialen stationären Lösungen führt zu Bifurkation,*

denn die erste Bifurkation findet eben genau statt bei

$$\lambda = -\frac{1}{\mu}\sigma_\varepsilon(l, \theta) = \pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_\varepsilon(l, \theta) = -\mu\pi^2,$$

und die trivialen stationären Lösungen sind nach Satz 4.4 (bzw. Satz 4.5) stabil für  $\sigma_\varepsilon(l, \theta) > -\mu\pi^2$  (und  $|l| \neq 0$  im nichtviskosen Fall), vgl. die in Abb.4.1 für  $\Psi$  in der Form (2.10) und viel zu großes  $\mu$  skizzierte Höhenlinie von  $\sigma_\varepsilon = -\mu\pi^2$ . Durch Ausrechnen des Typs insbesondere dieser ersten Bifurkation hoffen wir nun, Informationen über die Stabilität der abzweigenden Lösungen zu erhalten. Dabei denken wir an das folgende zweite typische Prinzip der Bifurkationstheorie. Zunächst

<sup>2</sup>und damit [GR85], Theorem 4.11 für diesen Fall nicht anwendbar ist

beachten wir noch, daß im Falle  $l = 0$  wegen  $\sigma_\varepsilon(-\varepsilon, \theta) = \sigma_\varepsilon(\varepsilon, \theta)$  gilt  $S(-w, \lambda) = S(w, \lambda)$ , und damit

$$F(-w, \lambda) = -w - \lambda Bw + \underbrace{B S(-w, \lambda)}_{=S(w, \lambda)}(-w) = -F(w, \lambda).$$

Im Falle  $l = 0$  wissen wir also a-priori, daß wir eine Pitchfork-Bifurkation erhalten, und bei betrachten der reduzierten Gleichung (5.18) in Abschnitt wird klar, daß dies auch für  $|l| > 0$  gilt. Da für  $\lambda < \pi^2$  die trivialen stationären Lösungen stabil sind, erwarten wir dann, daß weiter gilt,

(\*) *Ist die (erste) Bifurkation subkritisch (superkritisch) bzgl.  $\lambda$ , so sind die abzweigenden Lösungen instabil (stabil).*

Dabei ist mit sub- bzw. superkritischer Bifurkation bzgl.  $\lambda$  folgendes gemeint: den Parameterwert  $\lambda_k = k^2\pi^2$ , ( $k$  jetzt wieder beliebig) an dem die Lösungen verzweigen nennen wir kritisch, und die Mengen  $\{\lambda < \lambda_k\}$  bzw.  $\{\lambda > \lambda_k\}$  subkritischen bzw. superkritischen Bereich. Wenn nun die Bifurkation so ist, daß die verzweigenden Lösungen (lokal) nur für Werte  $\lambda < \lambda_k$  existieren, so nennen wir die Bifurkation subkritisch, im entgegengesetzten Falle superkritisch, und wenn der verzweigende Lösungsast sowohl im subkritischen wie auch im superkritischen Bereich existiert, so heißt die Bifurkation transkritisch. Das Attribut bzgl.  $\lambda$  führen wir mit, da in gleicher Weise sub-, super- und transkritisch bzgl. dem Eigenwert  $\omega_k(\lambda)$  definiert werden können, siehe den Beweis von Satz 5.2.

Eine z.B. subkritische Verzweigung bzgl.  $\lambda$  in einem Punkt  $(l, \theta)$  der Parameterebene mit  $\lambda = -\frac{1}{\mu}\sigma_\varepsilon(l, \theta) = k^2\pi^2$  können wir nun wie folgt veranschaulichen: wir betrachten einen kleinen Ausschnitt aus z.B. dem oberen rechten Quadranten von Abb.4.1 und die erste Bifurkation bei  $\lambda = \pi^2$ . Dann betrachten wir die Kurve  $\mathcal{C}$ , entlang derer wir die Höhenlinie von  $\lambda = \pi^2$  im Punkt  $(l, \theta)$  überschreiten, siehe Abb.5.2.(a), in der wir nun wieder das stark überhöhte  $\mu = 200$  benutzt haben. Die Gerade  $l = l^*$  werden wir später kommentieren. Verwenden wir nun den entlang der skizzierten Kurve wachsenden Parameter  $\lambda$  als Abzisse und tragen darüber die  $\alpha$ -Urbilder dieser  $\lambda$  im Sinne der Funktion  $\alpha \mapsto \lambda = \Lambda(\alpha)$  auf, so erhalten wir die Skizze in Abb.4.2.(b).

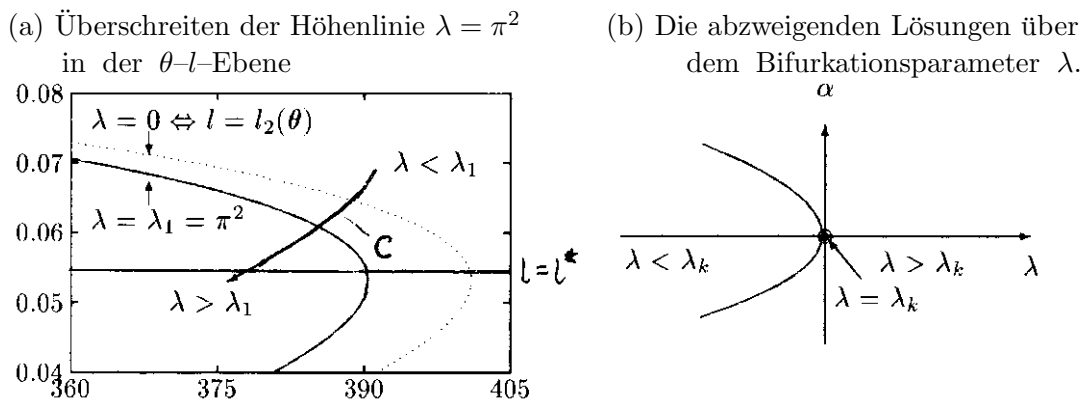


Abbildung 5.2: Überschreiten einer Kurve von Bifurkationspunkten in der  $\theta$ - $l$ -Ebene und die  $\alpha$ -Werte über den zugehörigen  $\lambda$ -Werten bei subkritischer Bifurkation.



Dabei beachte man, daß es sich um eine lokale Skizze handelt, d.h. daß das Intervall der  $\lambda$ -Werte, in dem die Bifurkation durch die Skizze Abb.5.2.(b) qualitativ richtig wiedergegeben ist, sehr klein sein kann.

Die obige Vermutung (\*) werden wir in Unterabschnitt 5.1.4 für den isothermen viskoelastischen Fall beweisen, d.h. für festes  $\theta$  und  $l$  als Bifurkationsparameter werden wir die Stabilität der abzweigenden Lösungen bzgl. der Dynamik von (3.33) untersuchen. Um nun den Typ der Verzweigung in einem  $(\bar{l}, \bar{\theta})$  mit  $\lambda(\bar{l}, \bar{\theta}) = k^2\pi^2 = \lambda_k$  zu bestimmen, führen wir eine Liapunov-Schmidt-Reduktion durch. Dazu schreiben wir

$$-\frac{1}{\mu}R(\varepsilon + \bar{l}, \bar{\theta}) = -\frac{1}{\mu} \left( \sigma_{\varepsilon\varepsilon}(\bar{l}, \bar{\theta})\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(\bar{l}, \bar{\theta})\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right) \\ \stackrel{\text{def}}{=} s_1(\bar{l}, \bar{\theta})\varepsilon + s_2(\bar{l}, \bar{\theta})\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

lassen im weiteren die Argumente  $\bar{l}, \bar{\theta}$  von  $s_1 = -(1/\mu)\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$  und  $s_2 = -(1/2\mu)\sigma_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}$  weg und erhalten die folgende Darstellung von  $S(w, \lambda)$ ,

$$S(w, \lambda) = s_1\partial_x^{-1}w + s_2(\partial_x^{-1}w)^2 + \mathcal{O}((\partial_x^{-1}w)^3).$$

Der Typ der Bifurkation in einem Punkt  $(\bar{l}, \bar{\theta})$  hängt dann wie folgt nur von  $s_1, s_2$  ab, sodaß es auf die konkrete Wahl von  $\mathcal{C}$  nicht ankommt:

**Satz 5.2** *Es seien  $\bar{l}, \theta$  so, daß gilt  $\lambda(\bar{l}, \theta) = k^2\pi^2 = \lambda_k$ , und wir setzen*

$$\beta_k = \beta_k(\bar{l}, \theta) = \frac{s_1^2}{6k^6\pi^6} + \frac{s_2}{4k^4\pi^4}. \quad (5.13)$$

*Dann ist die in Lemma 5.1 beschriebene Bifurkation in  $(0, \lambda_k)$  subkritisch bezüglich  $\lambda$ , wenn gilt  $\beta_k > 0$ , und superkritisch, falls  $\beta_k < 0$ . Im Falle  $\beta_k = 0$  hängt der Typ der Bifurkation von Termen höherer Ordnung als denen ab, welche wir nun berechnen.*

**Beweis.** Um in  $(0, \lambda_k)$  eine Liapunov-Schmidt-Reduktion durchzuführen, setzen wir

$$X_1 = N(A(\lambda_k)) = \text{span}\{\phi_k\} \quad \text{und} \quad X_2 = X \setminus X_1.$$

Als stetige Projektion von  $X$  auf  $X_1$  verwenden wir

$$Q_k : w \mapsto Q_k w = \left( \int_0^1 w \phi_k dx \right) \phi_k,$$

und zerlegen  $w$  in  $w = \alpha\phi_k + v$ . Nach der Standardtheorie über Fourierreihen haben wir die Darstellung

$$X_2 \ni v = \sum_{j \neq k} c_j \phi_j$$

mit Konvergenz in  $X$ . Die Summationsgrenzen haben wir zur Abkürzung weggelassen, sie laufen von  $j = 1$  bis  $\infty$ , eben mit Ausnahme von  $k$ . Weiter setzen wir noch  $\eta_k(\cdot) = \cos(k\pi\cdot)$ . Es gilt

$$F(w, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q_k F(\alpha\phi_k + v, \lambda) = 0 & \text{in } X_1 & \textcircled{1} \\ (I - Q_k)F(\alpha\phi_k + v, \lambda) = 0 & \text{in } X_2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

und es ist ② auflösbar nach

$$v = V(\alpha, \lambda) = V(\alpha, \Lambda(\alpha)) = h(\alpha) = \sum_{j \neq k} c_j(\alpha) \phi_j,$$

wobei gilt  $c_j(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^2)$  wegen  $h(0) = h'(0) = 0$ . Ausgeschrieben lautet ②

$$\begin{aligned} 0 &= (I - Q_k) [A(\lambda)(\alpha \phi_k + v) + BS(\alpha \phi_k + v, \lambda)(\alpha \phi_k + v)] \\ &= (I - Q_k) \underbrace{\alpha \omega_k(\lambda) \phi_k}_{\in X_1} + (I - Q_k) A(\lambda) v \\ &\quad + (I - Q_k) B \left[ s_1 \underbrace{\partial_x^{-1}(\alpha \phi_k + v)}_{-\frac{\alpha}{k\pi} \eta_k + \partial_x^{-1} v} (\alpha \phi_k + v) + \mathcal{O}((\alpha \phi_k + v)^3) \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$= \sum_{j \neq k} \left( 1 - \frac{\lambda}{j^2 \pi^2} \right) c_j(\alpha) \phi_j + (I - Q_k) B \left[ -\frac{s_1 \alpha^2}{2k\pi} \phi_{2k} + \mathcal{O}(\alpha^3) \right], \quad (5.15)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{s_1 \alpha^2}{8k^3 \pi^3} \phi_{2k}}$

wobei von (5.14) zu (5.15) benutzt wurde, daß gilt

$$A(\lambda) v = \sum_{j \neq k} \left( 1 - \frac{\lambda}{j^2 \pi^2} \right) c_j(\alpha) \phi_j \quad (5.16)$$

sowie  $\eta_k \phi_k = \cos(k\pi x) \sin(k\pi x) = 1/2 \sin(2k\pi x) = 1/2 \phi_{2k}$ . Koeffizientenvergleich liefert

$$\left( 1 - \frac{\lambda}{4k^2 \pi^2} \right) c_{2k}(\alpha) + \frac{s_1 \alpha^2}{8k^3 \pi^3} \stackrel{!}{=} 0,$$

und mit  $1 - \frac{\lambda}{4k^2 \pi^2} \approx \frac{3}{4}$  für  $\lambda$  nahe  $\lambda_k$ , d.h. eben für kleine  $|\alpha|$ , folgt

$$c_{2k}(\alpha) \approx -\frac{4}{3} \frac{s_1 \alpha^2}{8k^3 \pi^3},$$

mit Gleichheit für  $\alpha = 0$ , sowie

$$v = c_{2k}(\alpha) \phi_{2k} + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (5.17)$$

Wir setzen nun

$$Q_k F(\alpha \phi_k + v, \lambda) = \tilde{f}(\alpha, \lambda) \phi_k,$$

setzen weiter (5.17) in ① ein, und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{f}(\alpha, \lambda)\phi_k \\
&= Q_k \underbrace{A(\lambda)\alpha\phi_k}_{=\alpha\omega_k(\lambda)\phi_k \in X_1} + Q_k \underbrace{A(\lambda)[c_{2k}(\alpha)\phi_{2k} + \mathcal{O}(\alpha^3)]}_{\in X_2} \\
&\quad + Q_k B \left[ \left( s_1(\partial_x^{-1}(\alpha\phi_k + c_{2k}\phi_{2k} + \mathcal{O}(\alpha^3))) + s_2(\partial_x^{-1}(\alpha\phi_k + c_{2k}\phi_{2k} + \mathcal{O}(\alpha^3)))^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{O}((\alpha\phi_k + c_{2k}\phi_{2k} + \mathcal{O}(\alpha^3))^3) \right) \cdot (\alpha\phi_k + c_{2k}\phi_{2k} + \mathcal{O}(\alpha^3)) \right] \\
&= \alpha\omega_k(\lambda)\phi_k \\
&\quad + Q_k B \left[ \left( \underbrace{\frac{-s_1\alpha}{k\pi}\eta_k}_{\textcircled{a}} + \underbrace{\frac{-s_1c_{2k}}{2k\pi}\eta_{2k}}_{\textcircled{b}} + \underbrace{\frac{s_2\alpha^2}{k^2\pi^2}\eta_k^2}_{\textcircled{c}} + \mathcal{O}(\alpha^3) \right) \cdot \underbrace{(\alpha\phi_k)}_{\textcircled{d}} + \underbrace{c_{2k}\phi_{2k}}_{\textcircled{e}} + \mathcal{O}(\alpha^3) \right].
\end{aligned}$$

Die Produkte aus den Termen ① bis ⑤ und nachfolgende Anwendung von  $B$  und  $Q_k$  ergeben:

$$\begin{aligned}
\textcircled{a} \cdot \textcircled{d} &= \frac{-s_1\alpha^2}{k\pi}\eta_k\phi_k = \frac{-s_1\alpha^2}{2k\pi}\phi_{2k} \xrightarrow{B} \mathcal{O}(\alpha^2)\phi_{2k} \xrightarrow{Q_k} 0, \\
\textcircled{a} \cdot \textcircled{e} &= \frac{-s_1\alpha}{k\pi}c_{2k} \underbrace{\eta_k\phi_{2k}}_{=\frac{1}{2}\phi_k + \frac{1}{2}\phi_{3k}} \xrightarrow{B} \frac{s_1\alpha}{2k^3\pi^3}c_{2k}\phi_k + \mathcal{O}(\alpha^3)\phi_{3k} \xrightarrow{Q_k} \frac{s_1\alpha}{2k^3\pi^3}c_{2k}\phi_k, \\
\textcircled{b} \cdot \textcircled{d} &= \frac{-s_1c_{2k}}{2k\pi}\alpha \underbrace{\eta_{2k}\phi_k}_{=-\frac{1}{2}\phi_k + \frac{1}{2}\phi_{3k}} \xrightarrow{B} \frac{-s_1c_{2k}}{4k^3\pi^3}\alpha\phi_k + \mathcal{O}(\alpha^3)\phi_{3k} \xrightarrow{Q_k} \frac{-s_1c_{2k}}{4k^3\pi^3}\alpha\phi_k, \\
\textcircled{b} \cdot \textcircled{e} &= \mathcal{O}(\alpha^4), \\
\textcircled{c} \cdot \textcircled{d} &= \frac{s_2\alpha^2}{k^2\pi^2}\alpha \underbrace{\eta_k^2\phi_k}_{=\frac{1}{4}\phi_k + 14\phi_{3k}} \xrightarrow{B} \frac{-s_2\alpha^2}{k^4\pi^4}\alpha\phi_k + \mathcal{O}(\alpha^3)\phi_{3k} \xrightarrow{Q_k} \frac{-s_2\alpha^2}{k^4\pi^4}\alpha\phi_k, \\
\textcircled{c} \cdot \textcircled{e} &= \mathcal{O}(\alpha^4).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{f}(\alpha, \lambda) = \alpha \left( \omega_k(\lambda) + \frac{s_1}{4k^3\pi^3}c_{2k}(\alpha) - \frac{s_2}{4k^4\pi^4}\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3) \right) \phi_k \\
&= \alpha \left( \omega_k(\lambda) - \underbrace{\left( \frac{s_1^2}{6k^6\pi^6} + \frac{s_2}{4k^4\pi^4} \right)}_{=\beta_k} \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3) \right) \phi_k \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte reduzierte Gleichung, und an Hand dessen, für welche  $\lambda$ -Werte (5.18) eine nichttriviale Lösung für  $\alpha$  hat, entscheidet sich, von welchem Typ die Bifurkation ist. Im Falle  $\beta_k > 0$  existieren nichttriviale Lösungen von (5.18) nur für  $\omega_k(\lambda) > 0$ . Bezeichnet man nun den Eigenwert  $\omega_k(\lambda_k) = 0$  als den kritischen Wert, und die Mengen  $\{\omega < 0\}$  bzw.  $\{\omega > 0\}$  als sub-bzw. superkritisch, so ist damit für  $\beta > 0$  die Bifurkation superkritisch bezüglich  $\omega_k(\lambda)$ . Da jedoch

$$\omega'_k(\lambda_k) = -\frac{1}{k^2\pi^2},$$

ist  $\omega_k(\lambda) > 0$  lokal äquivalent zu  $\lambda < 0$ , respektive  $\omega_k(\lambda) < 0$  zu  $\lambda > 0$ . Deshalb ist im Falle  $\beta_k > 0$  die Bifurkation subkritisch bzgl.  $\lambda$ . Im Falle  $\beta_k < 0$  hat (5.18) nichttriviale Lösungen  $\alpha$  falls  $\omega_k(\lambda) < 0$ , die Bifurkation ist dann also subkritisch bzgl.  $\omega_k$  und damit superkritisch bzgl.  $\lambda$ . Man beachte, daß die beiden Definitionen übereinstimmen, wenn gilt  $\omega'_k(0) > 0$ , im vorliegenden Fall sind sie jedoch gerade entgegengesetzt.

Falls gilt  $\beta_k = 0$ , so entscheiden die Koeffizienten der  $\mathcal{O}(\alpha^3)$ -Terme in der Klammer in (5.18) über den Typ der Verzweigung.  $\square$

**Bemerkung 5.2** Betrachten wir eine feste Kurve von Bifurkationspunkten  $(l, \theta)$  in der  $\theta$ - $l$ -Ebene, z.B. die Kurve aller  $(l, \theta)$  mit  $\lambda(l, \theta) = \lambda_k$ , so hängt der Typ der Bifurkation über  $\beta_k$  von der Stelle  $(l, \theta)$  ab. Wir veranschaulichen und diskutieren dies wieder für unser Beispiel- $\Psi$  mit den Daten aus (2.12). In diesem Falle gilt

$$\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l, \theta) = -6\alpha_2 l + 20\alpha_3 l^3 \quad \text{und} \quad \sigma_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(l, \theta) = -6\alpha_2 + 60\alpha_3 l^2,$$

und damit hängen

$$s_1(l, \theta) = \frac{1}{\mu}(6\alpha_2 l - 20\alpha_3 l^3) \quad \text{und} \quad s_2(l, \theta) = \frac{1}{2\mu}(6\alpha_2 - 60\alpha_3 l^2)$$

und damit auch  $\beta_k$  tatsächlich nur noch von  $l$  (und von  $\mu$  und  $k$ ) ab. Zur Anschauung sind in Abb. 5.3.(a) gepunktet  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l)$  und  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}/50$ , sowie mit dem wieder stark überhöhten  $\mu = 100$  durchgezogen  $\beta_1(l) \cdot 500$  dargestellt. Es gilt  $\beta_1(l) < 0$  in zwei Intervallen  $B_1 = (-b_2, -b_1)$  und  $B_2 = (b_1, b_2)$  um die beiden seitlichen Nullstellen  $\pm l^* \approx 0.0531$  von  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ , wobei eben die Breite dieser Intervalle wegen der Faktoren  $\mu^{-2}$  und  $\mu^{-1}$  in den Summanden von  $\beta$  stark von  $\mu$  abhängt. Bei wachsendem  $\mu$  (und/oder wachsendem  $k$ ) werden die Intervalle  $B_1$  und  $B_2$  breiter. In Abb. 5.3.(b) ist für die erste Bifurkation ( $k = 1$ ) und  $\mu = 100$  der Streifen  $B_2$  skizziert. Wenn wir einen Bifurkationspunkt  $(l, \theta)$  aus dem fett gezeichneten Abschnitt der Kurve  $\lambda = \lambda_1 = \pi^2$  betrachten, so ist die Bifurkation superkritisch bzgl.  $\lambda$ , und ansonsten subkritisch. Dies ist für kleine  $\mu$  gewissermaßen der allgemeine Fall, für  $\mu = 2 \cdot 10^{-10}$  gilt z.B.  $b_2 - b_1 < 10^{-8}$ .  $\square$

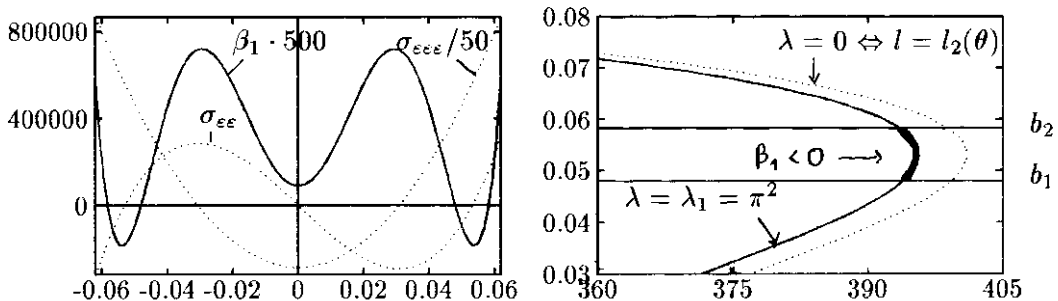


Abbildung 5.3: zu  $\beta_1$ ,  $\mu = 100$  stark überhöht.

### 5.1.4 Stabilitätsuntersuchung der abzweigenden Lösungen, isotherm

Für den isothermen Fall zeigen wir mittels [Hen81], Theorem 6.3.2, daß (\*) gilt. Dabei halten wir  $\bar{\theta}$  fest und betrachten  $l$  als Bifurkationsparameter in einer Umgebung eines  $l_0$  mit  $\sigma_\varepsilon(l_0, \bar{\theta}) = -\mu\pi^2$ . Dies entspricht  $\lambda = -\frac{1}{\mu}\sigma_\varepsilon(l_0, \bar{\theta}) = \pi^2$ , und den Zusammenhang zwischen  $\lambda$  und  $l$  als Bifurkationsparameter stellen wir weiter unten noch einmal heraus. Den festen Parameter  $\bar{\theta}$  lassen wir im folgenden stets weg, schreiben die transformierte Form (3.35) von (3.33) als  $dz/dt + Az = f(z, l)$ , und notieren [Hen81], Theorem 6.3.2 in der Form, die wir hier anwenden wollen.

**Satz 5.3** *Auf einem Banachraum  $X$  betrachten wir die parameterabhängige Gleichung*

$$\frac{dz}{dt} + Az = f(z, l) \quad (5.19)$$

für  $l \in (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$  mit einem  $\delta > 0$ . Es sei  $A$  sektoriell in  $X$  und  $f(0, l) = 0$  für  $l \in (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$ . Ferner sei  $U$  eine Umgebung von Null in  $X^\alpha$  für ein  $\alpha < 1$  und  $f : U \times (l_0 - \delta, l_0 + \delta) \rightarrow X$  sei  $m$ -mal stetig differenzierbar. Weiter habe

$$L_l = A - D_z f(0, l)$$

für  $l \in (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$  einen einfachen reellen Eigenvektor  $\omega(l)$  mit  $\omega(l_0) = 0$  und  $\omega'(l_0) \neq 0$ , und das restliche Spektrum von  $L_l$  liege in  $\{\operatorname{Re} \lambda > \beta\}$  für ein  $\beta > 0$ . Schließlich sei der Fluß in der (unter obigen Voraussetzungen nach [Hen81], Theorem 6.2.1 existierenden eindimensionalen) zentralen Mannigfaltigkeit für  $dz/dt + Az = f(z, l_0)$  gegeben durch

$$\frac{ds}{dt} + h(s, l_0) = 0$$

mit

$$h(s, l_0) = Cs^m + o(s^m) \quad \text{für } s \rightarrow 0 \quad (5.20)$$

mit einem  $C \neq 0$ , und wir schränken uns hier auf  $m \geq 3$  und  $m$  ungerade ein (sodaß wir keine transkritische Bifurkation erhalten können). Dann gilt im Fall  $\omega'(l_0) < 0$  eine der folgenden Alternativen:

- (i) (instabile subkritische Verzweigung) Für  $l \in (l_0 - \delta, l_0)$  existieren zwei instabile nichttriviale stationäre Lösungen  $z_-(l), z_+(l)$  von (5.19). Für  $l \in (l_0, l_0 + \delta)$  existieren keine kleinen nichttrivialen stationären Lösungen von (5.19).
- (ii) (stabile superkritische Verzweigung) Für  $l \in (l_0, l_0 + \delta)$  existieren zwei nichttriviale stationäre Lösungen  $z_-(l), z_+(l)$  von (5.19), und diese sind asymptotisch stabil. Für  $l \in (l_0 - \delta, l_0)$  existieren keine kleinen nichttrivialen stationären Lösungen von (5.19).

Im Fall  $\omega'(l_0) > 0$  gelten die entsprechend modifizierte Alternativen, d.h.

- (iii) (stabile subkritische Verzweigung) Für  $l \in (l_0 - \delta, l_0)$  existieren zwei asymptotisch stabile nichttriviale stationäre Lösungen  $z_-(l), z_+(l)$  von (5.19). Für  $l \in (l_0, l_0 + \delta)$  existieren keine kleinen nichttrivialen stationären Lösungen von (5.19).

(iv) (instabile superkritische Verzweigung) Für  $l \in (l_0, l_0 + \delta)$  existieren zwei nichttriviale stationäre Lösungen  $z_-(l), z_+(l)$  von (5.19). Diese sind instabil und für  $l \in (l_0 - \delta, l_0)$  existieren keine kleinen nichttrivialen stationären Lösungen von (5.19).

**Bemerkung 5.3** Für uns ist bzgl. der Bedingung (5.20) nur wichtig, daß die Funktion  $h(s, l_0)$  qualitativ mit  $\tilde{f}(\cdot, \lambda_k)$ , d.h. mit der reduzierten Gleichung (5.18) als Gleichung in  $\alpha$  bei festem  $\lambda = \lambda_k$  übereinstimmt, siehe die Definition von  $h(s, l)$  in [Hen81] vor Lemma 6.3.1. Damit gilt in unserer Situation (5.20) mit  $m = 3$ . Wir überprüfen nun zunächst die weiteren Voraussetzungen von Satz 5.3, und aus diesem Grunde betrachten wir die Gleichung (3.33) unter Verwendung der Pego–Transformation in der Form (5.19), da wir für diese Gleichung z.B. bereits wissen, daß der Linearteil sektoriell ist. Da nichttriviale stationäre Lösungen von (5.19) eindeutig mit nichttrivialen stationären Lösungen von (3.33) korrespondieren, wir von letzteren aber in Abschnitt 5.1.3 den Typ der Bifurkation ausgerechnet haben, können wir dann dieses Wissen mit den Stabilitätsaussagen in den Alternativen (i) bis (iv) von Satz 5.3 verbinden. Der Grund, warum wir nicht gleich die Liapunov–Schmidt–Reduktion in Abschnitt 5.1.3 in den transformierten Variablen  $p$  und  $q$  durchgeführt haben, liegt wieder darin, daß uns die ursprünglichen Variablen intuitiv besser zugänglich erscheinen, zumal das nicht–transformierte stationäre Problem nur noch  $u$  als Unbekannte enthält.  $\square$

Wir beginnen mit der Linearisierung von  $f(z, l) : X^{1/2} \times (l_0 - \delta, l_0 + \delta) \rightarrow X$  um  $(0, l)$ : mit  $X = L_a^2(0, 1) \times L_a^2(0, 1)$  und  $X^{1/2} = H_a^2(0, 1) \times H_a^2(0, 1)$  ist dabei  $f(\cdot, l)$  dreimal stetig differenzierbar nach [Mie96], Satz 1.7, da  $\partial_\varepsilon^j \sigma(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  für  $k = 0, 1, 2, 3$ , und  $H^2(0, 1) \subset L^p(0, 1)$  für alle  $p \leq \infty$ . Sei nun  $p = p_0 + \delta\tilde{p}$  und  $q = q_0 + \delta\tilde{q}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} f_1(p_0 + \delta\tilde{p}, q_0 + \delta\tilde{q}) &= \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p_0 + q_0) + \frac{\delta}{\gamma}(\tilde{p} + \tilde{q}) + l\right) - \int_0^1 \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p + q) + l\right) dx \\ &= \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p_0 + q_0) + l\right) + \sigma_\varepsilon\left(\frac{1}{\gamma}(p_0 + q_0) + l\right) \frac{\delta}{\gamma}(\tilde{p} + \tilde{q}) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &\quad - \int_0^1 \sigma\left(\frac{1}{\gamma}(p_0 + q_0) + l\right) + \sigma_\varepsilon\left(\frac{1}{\gamma}(p_0 + q_0) + l\right) \frac{\delta}{\gamma}(\tilde{p} + \tilde{q}) + \mathcal{O}(\delta^2) dx \end{aligned}$$

und für  $(p_0, q_0) = (0, 0)$  folgt

$$\begin{aligned} f_1(\delta\tilde{p}, \delta\tilde{q}) &= \underbrace{\sigma(l) - \int_0^1 \sigma(l) dx}_{=\sigma(l)} + \sigma_\varepsilon(l) \frac{\delta}{\gamma}(\tilde{p} + \tilde{q}) - \sigma_\varepsilon(l) \frac{\delta}{\gamma} \underbrace{\int_0^1 \tilde{p} + \tilde{q} dx}_{=0 \text{ da } \tilde{p}, \tilde{q} \in H_a^2(0, 1)} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= \frac{1}{\gamma} \sigma_\varepsilon(l) \delta(\tilde{p} + \tilde{q}) + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned}$$

Wegen  $f_2 = -f_1$  haben wir damit zum einen noch einmal  $f(0, l) = 0$  für alle  $l$  überprüft, und zum zweiten folgt

$$L_l = A - f_z(0, l) = \begin{pmatrix} -\left(-\frac{\mu}{\gamma} + \gamma\right) \partial_x^2 - \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} & \frac{\mu}{\gamma} \partial_x^2 - \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} \\ -\frac{\mu}{\gamma} \partial_x^2 + \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} & -\frac{\mu}{\gamma} \partial_x^2 + \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Um nun das Spektrum von  $L_l$  zu bestimmen, berechnen wir für  $k = 1, 2, \dots$

$$L_l \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \cos(k\pi x) = \underbrace{\begin{pmatrix} (-\frac{\mu}{\gamma} + \gamma)k^2\pi^2 - \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} & -\frac{\mu}{\gamma}k^2\pi^2 - \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} \\ +\frac{\mu}{\gamma}k^2\pi^2 + \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} & +\frac{\mu}{\gamma}k^2\pi^2 + \frac{\sigma_\varepsilon(l)}{\gamma} \end{pmatrix}}{=:B(k,l)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \cos(k\pi x),$$

und bestimmen die Eigenwerte  $\omega_k^{(1),(2)}(l)$  von  $B(k, l)$ . Dabei *müssen* wir zum einen einfachen Eigenwert  $\omega^*(l)$  erhalten mit  $\omega^*(l_0) = 0$  und  $\frac{d}{dl}\omega^*(l_0) \neq 0$ , denn sonst wäre  $l_0$  kein Bifurkationspunkt für das transformierte System. Dies dient also nochmal zum Überprüfen der in Bemerkung 5.3 skizzierten Vorgehensweise. Zum zweiten überprüfen wir damit die Bedingung, daß für  $l \in (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$  das restliche Spektrum in  $\{\operatorname{Re} \omega > \beta\}$  liegt für ein  $\beta > 0$ . Die Eigenwerte  $\omega_k^{(1),(2)}(l)$  sind gegeben durch

$$\omega_k^{(1),(2)}(l) = \frac{1}{2}(\gamma k^2 \pi^2 \mp k\pi \sqrt{\gamma^2 k^2 \pi^2 - (4\mu k^2 \pi^2 + 4\sigma_\varepsilon(l))}),$$

und mit  $\sigma_\varepsilon(l_0) = -\mu\pi^2$  gilt  $\omega^*(l_0) = 0$  für

$$\omega^*(l) = \omega_1^{(1)}(l) = \frac{1}{2}(\gamma\pi^2 - \pi\sqrt{\gamma^2\pi^2 - (4\mu\pi^2 + 4\sigma_\varepsilon(l))}),$$

und auch die zweite Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Für  $\frac{d}{dl}\omega^*(l_0)$  erhalten wir weiter

$$\left. \frac{d\omega^*}{dl} \right|_{l=l_0} = \left. \frac{\partial\omega^*}{\partial(\sigma_\varepsilon)} \right|_{\sigma_\varepsilon=-\mu\pi^2} \cdot \left. \frac{\partial(\sigma_\varepsilon)}{\partial l} \right|_{l=l_0} = \frac{1}{\gamma}\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l_0).$$

Somit sind im Falle  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l_0) \neq 0$  alle Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt, und es gilt eine der Alternativen (i) bis (iii). Die Bedingung  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l_0) \neq 0$  bedeutet dabei, daß gilt  $l_0 \neq \pm l^*$  mit dem in Abb. 5.2 eingezeichneten  $l^*$ , und ist insofern klar, als das wir an dieser Stelle kein Bifurkationsproblem nur mit  $l$  als Parameter haben, da wir bei Variation von  $l$  den Rand von  $\mathcal{S}$  zwar berühren, aber nicht überschreiten<sup>3</sup>.

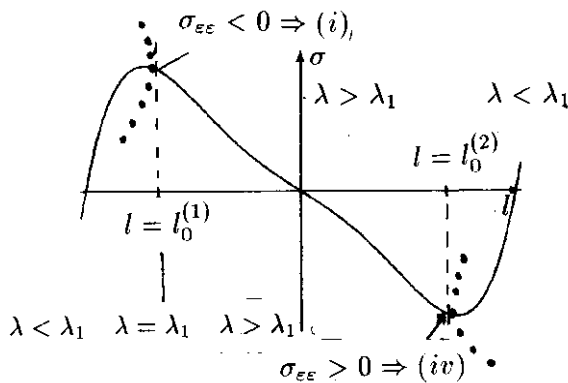
Wir verdeutlichen nun an Hand der beiden Spannungs–Dehungs–Diagramme in Abb. 5.4 für zwei Beispiel–Temperaturen und unser Beispiel– $\Psi$  den Zusammenhang zwischen  $\lambda$  und  $l$  als Bifurkationsparameter, sowie welche der Alternativen jeweils gilt. Dabei sind instabile bifurkierende Lösungen gepunktet und stabile durchgezogen symbolisiert.

- In (a) (niedrige Temperatur) setzen wir dabei voraus, daß die Bifurkationspunkte  $l_0^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$  außerhalb der Intervalle liegen, in denen  $\beta_1 < 0$  gilt, sodaß die Bifurkation nach Satz 5.2 subkritisch bzgl.  $\lambda$  ist. Dann gilt:
  - (1)  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l_0^{(1)}) < 0$  und deshalb  $\lambda < \lambda_1$  für  $l < l_0^{(1)}$ . Die nichttrivialen Lösungen existieren damit im Bereich  $l < l_0$ , und nach Alternative (i) sind diese instabil.
  - (2)  $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}(l_0^{(2)}) > 0$ , deshalb  $\lambda < \lambda_1$  für  $l > l_0^{(2)}$ , und die im Bereich  $l > l_0$  existierenden Lösungen sind nach Alternative (iv) instabil.

<sup>3</sup>es ist die Bedingung (5.3) an die Kurve  $\mathcal{C}$  verletzt

- in (b) (Temperatur nahe  $\theta_K$ ) nehmen wir jetzt jedoch an, daß die Bifurkationspunkte  $l_0^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  in den Intervallen mit  $\beta_1 < 0$  liegen, sodaß nach Satz 5.2 die Bifurkation superkritisch bzgl.  $\lambda$  ist. Um die Situation verdeutlichen zu können, ist also dabei  $\mu$  wieder stark überhöht. Wir erhalten nun gemäß den Alternativen (ii) und (iii) asymptotisch stabile abzweigende Lösungen, wobei der Zusammenhang zwischen  $l$  und  $\lambda$  als Bifurkationsparameter wie in (a) ist, und aus der Skizze klarwerden sollte, bei der wir uns auf  $l > 0$  einschränken.

(a) Niedrige Temperatur, abzweigende Lösungen instabil.



(b) Temperatur dicht unter  $\theta_K$ , abzweigende Lösungen stabil, (entarteter Fall).

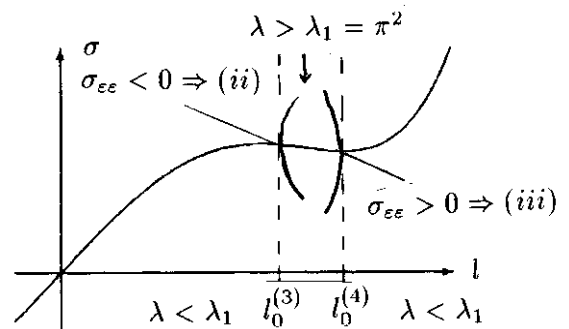


Abbildung 5.4: Veranschaulichung der abzweigenden Lösungen und deren Stabilität im Spannungs–Dehnungs–Diagramm.

**Bemerkung 5.4** Es ist [Hen81], Theorem 6.3.2 für das volle temperaturabhängige viskose Problem nicht anwendbar, da wir in diesem Fall bei der Linearisierung in einem Bifurkationspunkt neben dem erwünschten Nulleigenwert, der die isotherme Bifurkation liefert, stets den zusätzlichen Nulleigenwert zur konstanten Temperaturverschiebung erhalten. Trotzdem existiert auch in diesem Fall eine nun zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  an  $(l_0, \bar{\theta})$ , was man z.B. nach [Hen81], Theorem 6.2.1 zeigen kann, und wir erwarten, daß man durch Ausrechnen des Flusses auf  $\mathcal{M}$  die Bestätigung von (\*) auch für das Problem  $(P_\gamma)$  erhält. Da wir deshalb jedoch nur instabile abzweigende Lösungen erwarten, rechnen wir die Zentrumsmannigfaltigkeit nicht aus, – was mit erheblichem Aufwand verbundenen wäre, sondern belassen es bei dieser Bemerkung. □



## 5.2 Integration des stationären Problems

Das (lokale) Studium des Bifurkationsproblems hat insofern in eine Sackgasse geführt, als daß die erhaltenen Ergebnisse im wesentlichen, d.h. bis auf den Ausnahmefall  $\beta_1(l, \theta) < 0$ , nur instabile abzweigende Lösungen geliefert haben. Um nun zunächst für beliebiges festes  $\theta$  ein globales Verständnis des stationären Problems zu erhalten, transformieren wir es jetzt auf Integralgleichungen. Dabei wird es für den Rest dieses Kapitels bequemer sein, das Randwertproblem ohne die Substitution (2.6) zu behandeln, d.h. in der ursprünglichen Form

$$\mu u_{xxxx} - \sigma_\varepsilon(u_x; \theta) u_{xx} = 0 \quad (5.21a)$$

$$u(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{1}) = \mathbf{l}, \quad u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0, \quad (5.21b)$$

wobei in (5.21a) wie im weiteren die Schreibweise  $\sigma_\varepsilon(u_x; \theta)$  (statt  $\sigma_\varepsilon(u_x, \theta)$ ) ausdrücken soll, daß  $\theta \in \mathbb{R}_+$  ein fester Parameter ist.

Das folgende Lemma bildet den Grundstein für alle weiteren Betrachtungen:

**Lemma 5.4** *Für die Existenz von nichttrivialen Lösungen zu (5.21) gilt:*

(i) *notwendig ist: es existieren  $\varepsilon_a < l < \varepsilon_b$ , sodaß die Gerade  $g$  durch  $(\varepsilon_a, \Psi(\varepsilon_a; \theta))$  und  $(\varepsilon_b, \Psi(\varepsilon_b; \theta))$  im Intervall  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  echt unter  $\Psi(\cdot; \theta)$  verläuft, es muß also gelten*

$$\Psi(\varepsilon; \theta) - g(\varepsilon) = 0 \text{ für } \varepsilon \in \{\varepsilon_a, \varepsilon_b\} \text{ und } \Psi(\varepsilon; \theta) - g(\varepsilon) > 0 \text{ für } \varepsilon \in (\varepsilon_a, \varepsilon_b). \quad (5.22)$$

*Sei dabei  $g(\varepsilon) = c + s\varepsilon$ , d.h.*

$$\begin{aligned} s &= s(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = (\Psi(\varepsilon_b; \theta) - \Psi(\varepsilon_a; \theta)) / (\varepsilon_b - \varepsilon_a) \\ c &= c(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \Psi(\varepsilon_a; \theta) - s\varepsilon_a, \end{aligned} \quad (5.23)$$

*dann muß weiter gelten  $\sigma(\varepsilon; \theta) - s \neq 0$  für  $\varepsilon \in \{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$  und damit*

$$\sigma(\varepsilon_a; \theta) - s > 0 \quad \text{und} \quad \sigma(\varepsilon_b; \theta) - s < 0. \quad (5.24)$$

(ii) *Weiter müssen unter der Voraussetzung (i)  $\varepsilon_a, \varepsilon_b, s$  und  $c$  so gewählt werden können, daß gilt*

$$I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) := \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\Psi(\varepsilon; \theta) - g(\varepsilon)}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\mu}} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}. \quad (5.25)$$

(iii) *Unter den Voraussetzungen (i) und (ii) ist die Verschärfung der Bedingung  $\varepsilon_a < l < \varepsilon_b$  zu*

$$I_2(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) := \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{\sqrt{\Psi(\varepsilon; \theta) - g(\varepsilon)}} = \frac{l}{n} \sqrt{\frac{2}{\mu}} \quad (5.26)$$

*notwendig und hinreichend für die Existenz einer nichttrivialen Lösung  $u \in C^4(0, 1)$  von (5.21).*

**Beweis.** Wir verwenden wieder  $\varepsilon = u_x$ , und erhalten, daß  $u(x) = \int_0^x \varepsilon(\xi) d\xi$  genau dann eine Lösung von (5.21) ist, wenn gilt

$$\mu \varepsilon'' - \sigma(\varepsilon; \theta) = -s, \quad (5.27a)$$

$$\varepsilon'(0) = \varepsilon'(1) = 0, \quad (5.27b)$$

$$\text{und } \int_0^1 \varepsilon(\xi) d\xi = l, \quad (5.27c)$$

wobei  $s$  eine beliebige noch unbestimmte Konstante ist. Setzen wir  $y_1 = \varepsilon$ ,  $y_2 = \varepsilon'$  und schreiben (5.27a) als Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= \frac{1}{\mu}(\sigma(y_1; \theta) - s), \\ y_1(x_0) &= y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

so genügt die rechte Seite wegen der Differenzierbarkeit von  $\sigma$  einer lokalen Lipschitzbedingung, und nach Picard–Lindelöf existiert zu beliebigen Anfangsbedingungen eine eindeutige lokale Lösung  $y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Weiter unten werden wir sehen, daß wir bei den uns wegen den Randbedingungen (5.27b) interessierenden Anfangsbedingungen stets periodische Lösungen erhalten, die damit beschränkt und global sind. Für die weiteren Betrachtungen integrieren wir noch einmal (5.27a), und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\varepsilon}{dx} \right)^2 &= \mu \varepsilon' \varepsilon'' = (\sigma(\varepsilon; \theta) - s) \varepsilon' = \frac{d}{dx} \underbrace{(\Psi(\varepsilon; \theta) - s\varepsilon - c)}_{=: f(\varepsilon; s, c)} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{d\varepsilon}{dx} \right)^2 &= \frac{2}{\mu} f(\varepsilon; s, c) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon' = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} f(\varepsilon; s, c)} \quad (5.30)$$

Dabei ist  $c$  eine weitere beliebige Konstante, und wir wollen Lösungen zu  $+$  bzw.  $-$  in (5.30) als *positiven* ( $\varepsilon' > 0$ ) bzw. *negativen* ( $\varepsilon' < 0$ ) Lösungsabschnitt bezeichnen. Sei nun  $\varepsilon(0) =: \varepsilon_a$ , dann muß wegen  $\varepsilon'(0) \stackrel{!}{=} 0$  gelten

$$f(\varepsilon_a; s, c) = 0, \quad (5.31)$$

und weiter

$$\sigma(\varepsilon_a; \theta) - s \neq 0, \quad (5.32)$$

denn im Falle  $\sigma(\varepsilon_a; \theta) - s = 0$  ist  $\varepsilon \equiv \varepsilon_a$ ,  $\varepsilon' \equiv 0$  die eindeutige Lösung von (5.28), und mit (5.27c) folgt  $\varepsilon_a = l$ , wir erhalten also wieder die triviale Lösung. Damit  $\sqrt{f(\varepsilon; s, c)}$  reell ist, muß ferner gelten  $f(\varepsilon(x); s, c) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ , und wegen  $f(\varepsilon(1); s, c) \stackrel{!}{=} 0$  muß  $\varepsilon(x)$  für alle  $x \in [0, 1]$  in einem Intervall mit Randpunkten  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  liegen für ein  $\varepsilon_b \neq \varepsilon_a$  mit

$$f(\varepsilon_b; s, c) = 0 \quad (5.33)$$

und (aus dem gleichen Grund wie bei (5.32))

$$\sigma(\varepsilon_b; \theta) - s \neq 0. \quad (5.34)$$

Dabei gelte oBdA  $\varepsilon_a < \varepsilon_b$ , im anderen Falle tauschen wir die Bezeichnungen, wir wollen also in  $x = 0$  mit einem positiven Abschnitt starten. In Abb.5.5.(a) ist die Situation mit der Einfachheit halber  $l = s = 0$  skizziert.

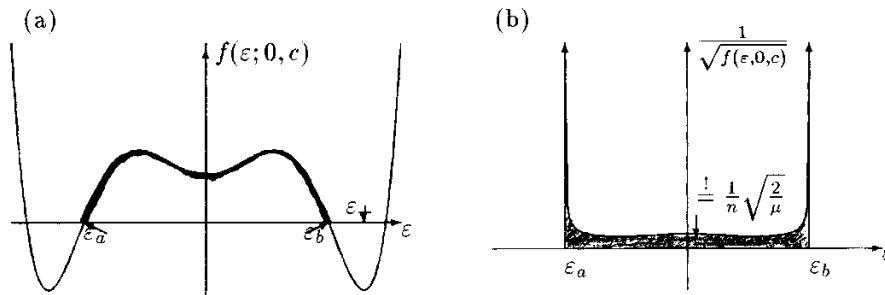


Abbildung 5.5:  $f(\varepsilon; s, c)$  und  $(f(\varepsilon; s, c))^{-\frac{1}{2}}$  für  $l = s = 0$ ,  $\theta_M < \theta < \theta_E$ .

Wir starten nun in  $x_0 = 0$  mit der Lösung von  $\varepsilon' = \sqrt{\frac{2}{\mu} f(\varepsilon; s, c)}$ ,  $\varepsilon(0) = \varepsilon_a$ , und bezeichnen mit  $x_1$  die  $x$ -Stelle, bei der wir  $\varepsilon = \varepsilon_b$  erreichen. Falls gilt  $x_1 = 1$  so haben wir eine Lösung gefunden, im anderen Falle fügen wir bei  $x_1$  einen negativen Abschnitt zur Anfangsbedingung  $\varepsilon(x_1) = \varepsilon_b$  an. Dabei gilt für  $x \rightarrow x_1 \pm 0$  wegen (5.33)  $\varepsilon' \rightarrow 0$  und wegen (5.28)  $\varepsilon'' \rightarrow \frac{1}{\mu}(\sigma(\varepsilon_b; \theta) - s)$ , also ist  $\varepsilon$  überall zweimal stetig differenzierbar, und insgesamt so glatt wie die rechte Seite von (5.28). Der negative Abschnitt existiert bis  $x_2 = 2x_1$ , wo wir wieder  $\varepsilon = \varepsilon_a$  erreichen, und dort können wir gegebenenfalls wieder einen positiven Abschnitt anfügen. Es schwankt also die Verzerrung  $\varepsilon$  im Bereich  $[\varepsilon_a, \varepsilon_b]$  und  $f(\varepsilon; s, c)$  im fetter gedruckten Bereich der Kurve in Abb.5.5.(a). Wegen Bedingung (5.27c) muß dabei gelten

$$\varepsilon_a < l < \varepsilon_b, \quad (5.35)$$

denn z.B. im Fall  $l < \varepsilon_a < \varepsilon_b$  folgt  $l < \varepsilon(x)$  für alle  $x \in [0, 1]$  im Widerspruch zu (5.27c) und analog im umgekehrten Fall. Mit (5.31) bis (5.35) ist (i) bewiesen. Um weiter insgesamt die Bedingung (5.27b) zu erfüllen, müssen  $\varepsilon_a, \varepsilon_b, s$  und  $c$  so gewählt sein, daß gilt

$$nx_1 = 1 \quad (5.36)$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dabei ist entlang jedes positiven oder negativen Abschnittes  $\varepsilon'$  streng monoton, und die Umkehrung

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} f(\varepsilon; s, c)}} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{f(\varepsilon; s, c)}} \quad (5.37)$$

führt z.B. im Falle eines positiven Abschnittes beginnend bei  $x_0 = 0$  auf

$$x_1(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{f(\varepsilon, s, c)}}. \quad (5.38)$$

Aus (5.36) und (5.38) erhalten wir (ii), was noch einmal in Abb.5.5(b) skizziert ist. Dabei beachte man, daß das uneigentliche Integral (5.38) genau dann konvergiert, wenn (5.24) erfüllt ist. Falls gilt  $\sigma(\varepsilon_a; \theta) - s = 0$ , so folgt nach Taylor

$$\Psi(\varepsilon; \theta) - g(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon(\varepsilon; \theta)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_a,$$

und wegen

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(\sigma_\varepsilon(\varepsilon_a; \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon))}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)}{\sqrt{\sigma_\varepsilon(\varepsilon_a; \theta)}} \quad (5.39)$$

divergiert das uneigentliche Integral (5.38) an der unteren Grenze, analog an der oberen Grenze im Falle  $\sigma_\varepsilon(\varepsilon_b; \theta) - s = 0$ . Bei der genaueren Diskussion von Bedingung (5.27c) können wir uns schließlich wegen

$$l \stackrel{!}{=} \int_0^1 \varepsilon(x) dx = n \int_0^{x_1} \varepsilon(x) dx$$

auf einen einzelnen Ast einschränken. Dabei erhalten wir

$$\int_0^{x_1} \varepsilon(x) dx = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{\sqrt{\Psi(\varepsilon; \theta) - g(\varepsilon)}} \stackrel{!}{=} \frac{l}{n} \quad (5.40)$$

und damit (iii). Eine aus  $n$  Abschnitten zusammengesetzte Lösung von (5.27) wollen wir schließlich  $n$ -Übergangs-Lösung nennen. Man beachte, daß eine  $n$ -Übergangs-Lösung periodisch ist mit Periode  $x_1 = \frac{2}{n}$ . Da ferner jede nichttriviale Lösung von (5.1) eine  $n$ -Übergangs-Lösung sein muß, handelt es sich bei den in Abschnitt 5.1 in einem  $(l, \bar{\theta})$  mit  $\lambda(l, \bar{\theta}) = k^2\pi^2$  verzweigenden Ästen wegen der Darstellung (5.6) um Äste von  $k$ -Übergangs-Lösungen. Hierauf werden wir in Unterabschnitt 5.2.3 noch einmal zurückkommen.  $\square$

**Bemerkungen und Definitionen:** Mit Lemma 5.4 ist die Aufgabe, eine nichttriviale Lösung von (5.1) zu finden, dazu transformiert, Paare  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  zu finden, sodaß mit  $(s, c)$  gegeben durch (5.23) die Bedingungen (5.22), (5.24) sowie die Integralgleichungen (5.25) und (5.26) erfüllt sind. Dies führt zu folgenden Definitionen:

Zu gegebenem  $\theta$  wollen wir Paare  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \in \mathbb{R}^2$ , sodaß (5.22) und (5.24) erfüllt sind, als **zulässig** bezeichnen, und die **Menge dieser zulässigen Paare** als  $\Xi(\theta)$ .

Entsprechend können wir auch Paare  $(s, c) \subset \mathbb{R}^2$  zulässig nennen, sofern passende  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  existieren, sodaß (5.22) und (5.24) erfüllt sind. Diese Sprechweise wird z.B. in [CGS84] verwendet, und wie dort bezeichnen wir die **Menge der zulässigen  $(s, c)$ -Paare** als  $\Sigma(\theta)$ .

Durch (5.23) ist nun eine Abb.  $\mathbf{T}(\cdot; \theta) : \Xi(\theta) \rightarrow \Sigma(\theta)$ ,  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \mapsto (s, c)$  gegeben, die offensichtlich bijektiv ist für  $\theta \leq \theta_M$ . Im Falle  $\theta > \theta_M$  können jedoch zu gegebenen  $(s, c) \in \Sigma(\theta)$  zwei verschiedene Paare  $(\varepsilon_a^{(1)}, \varepsilon_b^{(1)})$  und  $(\varepsilon_a^{(2)}, \varepsilon_b^{(2)})$  existieren, sodaß (5.22) erfüllt ist. Dabei gilt jedoch stets

$$\varepsilon_a^{(1)} < \varepsilon_b^{(1)} < 0 < \varepsilon_a^{(2)} < \varepsilon_b^{(2)}, \quad (5.41)$$

und nur eines der beiden Paare kann die Bedingung  $\varepsilon_a < l < \varepsilon_b$  erfüllen, sodaß wir informal (d.h. für  $\theta > \theta_M$  unter Angabe von  $l$ ) stets eine 1 : 1-Beziehung zwischen  $\Xi(\theta)$

und  $\Sigma(\theta)$  erhalten. Damit können wir  $I_1$  und  $I_2$  auch als  $\tilde{I}_i(s, c) := I_i(\varepsilon_a(s, c), \varepsilon_b(s, c))$ ,  $i = 1, 2$  über  $\Sigma(\theta)$  betrachten, wofür wir dann der Einfachheit halber  $I_i(s, c)$  schreiben. Eine Veranschaulichung der Mengen  $\Xi(\theta)$  bzw.  $\Sigma(\theta)$  für verschiedene Temperaturen folgt im nächsten Unterabschnitt, und bildet die Grundlage für die Diskussion der Integrale  $I_1(\cdot; \theta)$  und  $I_2(\cdot; \theta)$  über ihrem gemeinsamen Definitionsbereich  $\Xi(\theta)$  in Unterabschnitt 5.2.2.

Der Grund für die zweigleisige Vorgehensweise liegt darin, daß wir die Mengen  $\Xi(\theta)$  für anschaulicher halten, wohingegen in der Literatur, insbesondere in [CGS84],  $I_1, I_2$  üblicherweise über  $\Sigma(\theta)$  diskutiert werden.

Interpretieren wir weiter die Ortsvariable  $x$  als Zeit, so gibt  $I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta)$  die Zeit  $x_1$  an, die eine Lösung benötigt, um im Phasenraum  $\mathbb{R}^2$  vom Punkt  $(\varepsilon_a, 0)$  zum nächsten Schnittpunkt  $(\varepsilon_b, 0)$  mit der  $\varepsilon' = 0$  Achse zu gelangen. Daher stammt der Name **Time-Map**. Das Integral  $I_2(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta)$  ergibt die Dehnung bei  $x_1$  und sei im weiteren als **Dehnungs-Map** bezeichnet.

Man beachte, daß es nach Lemma 5.4 im weiteren darum gehen wird, für ein  $n \in \mathbb{N}$  Schnittpunkte der Höhenlinien  $I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = 1/n\sqrt{2/\mu}$  und  $I_2(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = 1/n\sqrt{2/\mu}$  über  $\Xi(\theta)$  zu finden. Aus einem Tupel  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \in \Xi(\theta)$  erhalten wir dann genau zwei Lösungen von (5.1), und zwar  $\varepsilon_1(\cdot)$  mit  $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_a$  und die um die halbe Periode  $x_1$  gegenüber  $\varepsilon_1$  verschobene Lösung  $\varepsilon_2(\cdot)$  mit  $\varepsilon_2(0) = \varepsilon_b$ . Diese beiden Lösungen besitzen stets genau die gleichen Eigenschaften im Sinne von freier und innerer Energie usw., und für den Rest dieses Kapitels werden wir stets Lösungen mit  $\varepsilon(0) = \varepsilon_a$  betrachten, ohne weiter zu erwähnen, daß die gleichen Eigenschaften auch für die verschobene Lösung mit  $\varepsilon(0) = \varepsilon_b$  gelten.

Damit ist nun  $G_{\text{nt}}(\theta, l)$  durch die Tupel  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  parametrisiert, und es erweist sich als zweckmäßig, diese Parametrisierung zu schreiben als

$$G_{\text{nt}}^P(\theta, l) = \{(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n) \in \Xi(\theta) \times \mathbb{N} : I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\mu}}, I_2(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) = \frac{l}{n}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\},$$

also das durch  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  gegebene  $n \in \mathbb{N}$  in  $G_{\text{nt}}^P(\theta, l)$  (formal redundant) mit aufzunehmen. Man beachte, daß die Existenz einer Parametrisierung von  $G_{\text{nt}}(\theta, l)$  durch Tupel  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  trivial ist, und wir  $G_{\text{nt}}(\theta, l)$  z.B. auch durch Tupel  $(\varepsilon(0), \varepsilon'(0))$  parametrisieren können. Der Wert von  $G_{\text{nt}}^P$  liegt in der analytischen Zugänglichkeit und in der (unter gewissen Schwierigkeiten) numerischen Berechenbarkeit.

Schließlich weisen wir noch darauf hin, daß für feste  $\theta, \varepsilon_a, \varepsilon_b$  unmittelbar nach (5.38)

$$x_1 = \mathcal{O}(\mu^{\frac{1}{2}}) \quad (5.42)$$

gilt, was für das stationäre Problem den Kern der Bedeutung der Größe von  $\mu$  ausmacht.

### 5.2.1 Die Mengen $\Xi(\theta)$ und $\Sigma(\theta)$ zulässiger Paare

Ziel dieses Unterabschnittes ist, eine Anschauung der Mengen  $\Xi(\theta)$  bzw.  $\Sigma(\theta)$  zu geben und dabei einige wesentliche Begriffe einzuführen. Ferner notieren wir ein einfaches Korollar aus Lemma 5.4.(i).

In Abbildung 5.6 sind für verschiedene Temperaturen links  $\Xi(\theta)$  ( $\varepsilon_b$  über  $\varepsilon_a$ ), rechts  $\Sigma(\theta)$  ( $c$  über  $s$ ), und dazwischen jeweils Beispiele für zu verschiedenen  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$ - bzw.

$(s, c)$ -Paaren gehörende Geraden  $g$  an  $\Psi(\varepsilon; \theta)$  skizziert. Die Funktion  $\Psi(\cdot; \theta) - g(\cdot)$  ergibt sich dann, indem der linke ( $= \varepsilon_a$ ) und der rechte ( $= \varepsilon_b$ ) Endpunkt des fett gedruckten Abschnitts auf Null geschoben werden.

Aus (5.22), (5.24) ist dabei klar, daß  $\Xi(\theta)$  bzw.  $\Sigma(\theta)$  für alle  $\theta$  (für  $\theta > \theta_K$  leere) offene Mengen sind. Bei der Beschreibung von  $\Xi(\theta)$  geht es vor allem darum, die Ränder in geeignete Teile zu zerlegen und für diese Bezeichnungen einzuführen, auf die wir uns bei der Diskussion von  $I_1$  und  $I_2$  beziehen werden, da insbesondere das Verhalten von  $I_1$  über  $\Xi(\theta)$  (bzw.  $\Sigma(\theta)$ ) zu den Rändern hin wesentlich sein wird.

Die Skizzen wurden mittels des Programms Mathematica<sup>R</sup> berechnet für  $\Psi$  in der Form (2.10) mit den Daten aus (2.12). Insbesondere ist auch der nur von  $\theta$  abhängige Teil  $\Psi_0(\theta) = c_v \theta (C_1 - \ln(\theta)) + C_2$  mit berücksichtigt, was sich in der Ordinate von  $c$  in  $\Sigma(\theta)$  auswirkt. Dabei haben wir  $C_1 = 7.5$  gesetzt und uns für die Normierung  $C_2 = -c_v \theta_M (C_1 - \ln \theta_M)$  entschieden, sodaß  $\Psi(0, \theta_M) = \Psi_0(\theta_M) = 0^4$ . Im einzelnen gilt nun für die verschiedenen Temperaturen:

- (a)  $\theta = \theta_M = 348.75$ :  $\Xi(\theta_M)$  ist das skizzierte „abgerundete Dreieck“, und wir zerlegen den Rand  $\partial\Xi(\theta_M)$  wie angegeben in die drei Teile  $\partial_i\Xi(\theta_M)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Es ist  $\partial_1\Xi(\theta_M)$  gegeben durch  $-l_2(\theta_M) \leq \varepsilon_a = \varepsilon_b \leq l_2(\theta_M)$ , und  $\partial_2\Xi(\theta_M)$  und  $\partial_3\Xi(\theta_M)$  treffen sich im sogenannten Maxwell-Punkt  $P_M := (\varepsilon_-(\theta_M), \varepsilon_+(\theta_M))$ , dessen Bild  $T(P_M; \theta_M) =: (s_0, c_0)$  unter  $T(\cdot; \theta_M)$  wir ebenfalls als Maxwell-Punkt  $P_M$  bezeichnen. Eine Erläuterung dieses Begriffes folgt weiter unten.

Die Bilder von  $\partial_i\Xi(\theta_M)$ ,  $i = 1, 2, 3$  unter  $T$  sind in  $\Sigma(\theta_M)$  analog bezeichnet.

Qualitativ gleiche  $\Xi(\theta)$  und  $\Sigma(\theta)$  erhalten wir für alle  $\theta < \theta_M$ .

- (b)  $\theta_M < \theta = 360 < \theta_E$ : Für  $\theta > \theta_M$  entsteht wegen der Konvexität von  $\Psi$  bei  $\varepsilon = 0$  eine nach innen wachsende Beule zwischen  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = -l_1(\theta)$  und  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = l_1(\theta)$ , die bei  $\theta = 360$  die skizzierte Form angenommen hat, und deren Rand wir mit  $\partial_4\Xi(\theta)$  bezeichnen.  $T(\partial_4\Xi(360); 360)$  liegt nun im Innern von  $\Sigma(360)$  nahe dem zur zweiten der mittleren Skizzen gehörenden  $(s, c)$ -Paar. Die restlichen Ränder werden analog zu (i) abgebildet.

- (c)  $\theta = 370 < \theta_E$ : Besagte Beule ist so groß geworden, daß  $\Xi(370)$  in drei disjunkte Gebiete zerfällt, bezeichnet mit  $\Xi_-(370)$ ,  $\Xi_M(370)$ ,  $\Xi_+(370)$ . Zusätzlich zu  $P_M(370)$  erhalten wir nun Punkte  $P_{M^*}^\pm$ , die wir als Neben-Maxwell-Punkte bezeichnen wollen. Eine Erläuterung dieses Begriffes folgt unten und abschließend in Abschnitt 5.5. Um nicht zu umständlich zu werden sind nur die auf  $\{\varepsilon_a = \varepsilon_b\}$  liegenden Ränder von  $\Xi_\pm(370)$  bezeichnet, und auf eine Beschreibung der Bilder von  $\partial\Xi(370)$  unter  $T(\cdot; 370)$  verzichten wir ganz.

- (d)  $\theta_A < \theta = 380 < \theta_K$ :  $\Xi(\theta)$  zerfällt für  $\theta \geq \theta_E$  in die zwei Gebiete  $\Xi_-(\theta)$  und  $\Xi_+(\theta)$  mit  $\varepsilon_a < \varepsilon_b < 0$  bzw.  $0 < \varepsilon_a < \varepsilon_b$ , und wir erhalten zwei Maxwell-Punkte  $P_M^\pm(380)$ . Zusätzlich sind in der  $\Xi(380)$ -Skizze die Geraden  $\varepsilon_a = l_3(380)$  und  $\varepsilon_b = l_4(380)$  eingezeichnet, dies bezieht sich auf Korollar 5.5.

$\Sigma(380)$  ist nur für  $\Xi_+(\theta)$  eingezeichnet. Man beachte, daß  $\Xi(\theta)$  wegen der Symmetrie von  $\Psi$  stets symmetrisch ist zur Geraden  $\varepsilon_a = -\varepsilon_b$ , sowie  $\Sigma(\theta)$  symmetrisch zur Geraden  $s = 0$ .

<sup>4</sup>Angaben zu  $C_1$  und  $C_2$  fehlen in [Bub95]

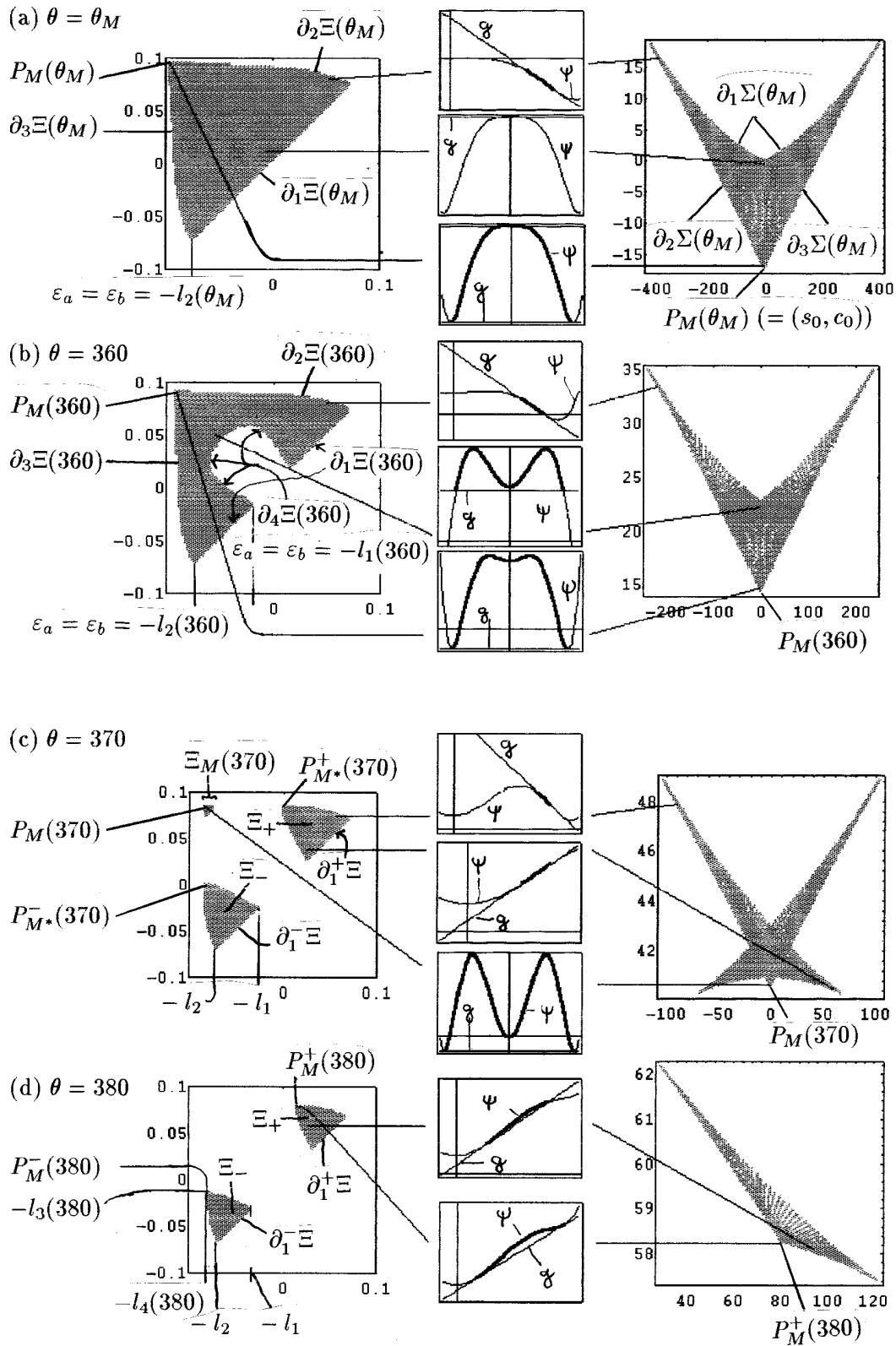


Abbildung 5.6: Beispiele zulässiger Mengen  $\Xi(\theta)$  und  $\Sigma(\theta)$  für  $\theta = \theta_M, 360, 370, 380$ .

Für  $\theta \rightarrow \theta_K$  schrumpfen die beiden Teilgebiete von  $\Xi(\theta)$  auf die Punkte  $\pm(l^*, l^*)$  hin zusammen, mit  $l^* = l_1(\theta_K) = l_2(\theta_K) = \sqrt{3\alpha_2/10\alpha_3} \approx 0.053$ , und für  $\theta > \theta_K$  ist  $\Xi(\theta)$  leer und es existieren keine nichttrivialen stationären Lösungen.

Das folgende Korollar aus Lemma 5.4.(i) faßt die Bedingungen zusammen, unter denen keine nichttrivialen Lösungen von (5.21) existieren können:

**Korollar 5.5** *Es besitzt (5.21) keine nichttriviale Lösung für*

$$(i) \quad \theta \leq \theta_E \text{ und } |l| \geq \varepsilon_+(\theta)$$

$$(ii) \quad \theta_K \leq \theta \text{ und } l \text{ beliebig.}$$

Weiter existieren Kurven  $l_3 : [\theta_E, \theta_K] \rightarrow [0, l_1(\theta_K)]$ ,  $l_4 : [\theta_E, \theta_K] \rightarrow [l_2(\theta_K), \varepsilon_+(\theta_E)]$ , sodaß

$$(iii) \quad \text{für } \theta_E \leq \theta_K \text{ und } |l| \leq l_3(\theta) \text{ oder } |l| \leq l_4(\theta)$$

ebenfalls keine nichttriviale Lösung von (5.21) existiert.

Abbildung 5.7 soll nun noch dazu dienen, die Maxwell-Punkte sowie die zugehörigen Maxwell-Linien zu erläutern, sowie die Kurven  $l_3$  und  $l_4$  in der  $\theta$ - $l$ -Parameterebene zu veranschaulichen. Zuvor geben wir noch folgende Definition der Maxwell-Linie:

**Definition 5.6** *Zu gegebenen  $(l, \theta)$  bezeichnen wir eine Gerade  $g_M$  als Maxwell-Linie, wenn gilt: es gibt  $\varepsilon_\alpha < l < \varepsilon_\beta$ , so daß  $\Psi(\varepsilon, \theta) - g_M(\varepsilon) > 0$  für  $\varepsilon \in (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$  und  $\Psi$  von  $g_M$  in  $\varepsilon_\alpha$  und  $\varepsilon_\beta$  tangential geschnitten wird. Schreiben wir wieder  $g(\varepsilon) = c + s\varepsilon$ , so muß also gelten  $\sigma(\varepsilon_\alpha, \theta) - s = \sigma(\varepsilon_\beta, \theta) - s = 0$ .*

Im  $\Psi$ - $\varepsilon$ -Diagramm Abb.5.7(a) ist für  $\theta > \theta_E$  und positive Verzerrungen die  $\Psi(\cdot, \theta)$  konvexifizierende Maxwell-Linie  $g_M(\cdot)$  eingezeichnet, durch deren Schnittpunkte mit  $\Psi$  die Stellen  $\varepsilon_\alpha = l_3(\theta)$  und  $\varepsilon_\beta = l_4(\theta)$  gegeben sind. Für  $\theta \leq \theta_E$  verbindet  $g_M$  die Punkte  $(\varepsilon_-(\theta), \Psi(\varepsilon_-(\theta), \theta))$  und  $(\varepsilon_+(\theta), \Psi(\varepsilon_+(\theta), \theta))$ , dort können wir also  $l_4(\cdot)$  durch  $\varepsilon_+(\cdot)$  fortsetzen, vgl.  $g_M$  in Abb.5.7(c). Die Maxwell-Linie  $g_M$  stellt das Infimum der in Lemma 5.4.(i) beschriebenen zulässigen Geraden dar, erfüllt selbst jedoch nicht die notwendige Bedingung (5.24), und hängt direkt mit nichttrivialen Lösungen von (5.27) für  $\mu = 0$  zusammen, die die freie Energie minimieren, siehe Abschnitt 5.4. Die Schnitt(Berühr-)punkte  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$  von  $g_M(\cdot)$  mit  $\Psi(\cdot, \theta)$  ergeben zusammen gerade den Maxwell-Punkt  $P_M = (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$  in  $\Xi(\theta)$ . Dementsprechend erhalten wir für  $\theta > \theta_E$  zwei Maxwell-Punkte  $P_M^-(\theta)$  und  $P_M^+(\theta)$ . Weiter existiert ein  $\theta_M < \theta^* < \theta_E$ , sodaß für  $\theta^* < \theta < \theta_E$  Punkte  $P_{M^*}^\pm$  existieren, die ebenfalls Maxwell-Linien gemäß Definition 5.6 ergeben, siehe Abb.5.7(c). Diese Punkte und die zugehörigen Linien wollen wir jedoch nicht als Maxwell-Punkte bzw. Linien betrachten, sondern als Neben-Maxwell-Punkte (Linien) bezeichnen. Die Begründung hierfür folgt in Abschnitt 5.4. Als Äquivalent von  $g_M$  wird in das zu  $\Psi$  gehörige  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm die Gerade  $\sigma \equiv s$  eintragen und dort ebenfalls Maxwell-Linie genannt, siehe die  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme in Abb.5.7(b). Die Maxwell-Linie kann auch direkt im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm konstruiert werden gemäß Maxwells „equal-area-rule“, denn wegen

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_\alpha}^{\varepsilon_\beta} \sigma(\varepsilon, \theta) - s d\varepsilon &= \Psi(\varepsilon_\beta) - \Psi(\varepsilon_\alpha) - s(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \\ &= \Psi(\varepsilon_\beta) - s\varepsilon_\beta - c - (\Psi(\varepsilon_\alpha) - s\varepsilon_\alpha - c) = 0 \end{aligned}$$



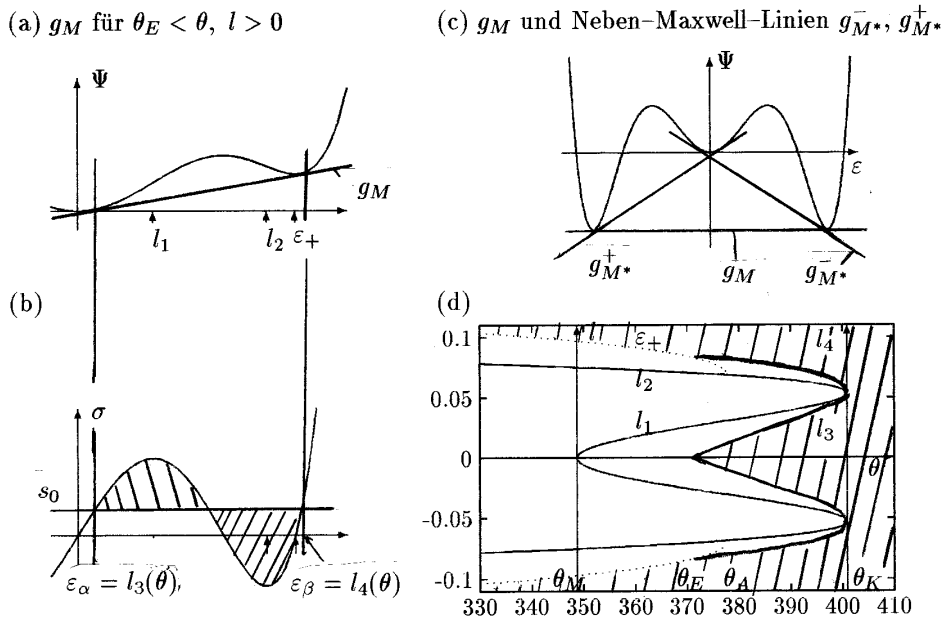


Abbildung 5.7: zu  $l_3$  und  $l_4$ , gegeben durch die Maxwell-Linie  $g_M$ , die Maxwell-Linie im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm und Maxwells „equal-area-rule“, Haupt- und Neben-Maxwell-Linien für gewisse  $\theta$ , sowie die Kurven  $\varepsilon_{\pm}, \pm l_1, l_2, l_3, l_4$  in der  $\theta$ - $l$  Parameterebene.

müssen die beiden schraffierten Gebiete die gleiche Fläche haben. In Abb.5.7(d) sind schließlich noch für  $\Psi$  in der Form (2.10) mit den Daten aus (2.12) die expliziten Kurven  $\pm l_1, \pm l_2$  und  $\varepsilon_+, \varepsilon_-$  eingezeichnet, sowie das qualitative Verhalten von  $l_3$  und  $l_4$ . Für  $(\theta, l)$  aus dem schraffierten Gebiet existieren keine nichttrivialen stationären Lösungen.

**Bemerkung 5.5** Falls  $\Psi(\cdot, \theta)$  ein double-well Potential ist, wird die Maxwell-Linie üblicherweise unabhängig von  $l$  definiert als die  $\Psi(\cdot, \theta)$  konvexifizierende Gerade  $g_M$ , die die beiden Minima  $(\varepsilon_-, \Psi(\varepsilon_-(\theta), \theta))$  und  $(\varepsilon_+, \Psi(\varepsilon_+(\theta), \theta))$  verbindet. Anschließend erhält man für die Existenz nichttrivialer Lösungen von (5.1) die notwendige Bedingung  $\varepsilon_-(\theta) < l < \varepsilon_+(\theta)$  an  $l$ . Für  $\theta_E < \theta < \theta_K$  benötigen wir jedoch zwei Maxwell-Linien, um  $\Psi(\cdot, \theta)$  zu konvexifizieren. Deshalb sprechen wir von einer zu  $(\theta, l)$  gehörigen Maxwell-Linie. Unter Vernachlässigung der zu Punkten  $P_M^*$  gehörenden Neben-Maxwell-Linien erhalten wir damit für alle  $(l, \theta)$  entweder keine oder eine eindeutige (Haupt-) Maxwell-Linie, und Korollar 5.5 gibt an, für welche Werte von  $(\theta, l)$  keine Maxwell-Linie existiert. B

### 5.2.2 Die Time-Map und die Dehnungs-Map

Zunächst fassen wir einige analytische Resultate betreff des Verhaltens von  $I_1$  zu den Rändern von  $\Xi(\theta)$  hin zusammen, da dieses von wesentlicher Bedeutung ist. Das Verhalten von  $I_2$  zu den Rändern hin können wir dann aus dem von  $I_1$  ableiten. Bereits aus (5.39) ist klar, daß  $I_1(\cdot; \theta)$  für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial\Xi(\theta) \setminus \partial_1\Xi(\theta)$  gegen  $+\infty$  geht, da das Integral an der unteren oder an der oberen Grenze divergiert. Ein etwas anderer aber

ähnlicher Effekt tritt für  $\theta_M < \theta$  und  $(\theta_a, \theta_b) \rightarrow \partial_4 \Xi(\theta)$  mit  $\varepsilon_a < 0$  und  $\varepsilon_b > 0$  auf. In diesem Fall entsteht im Innern des Integrationsintervalls eine Singularität der Ordnung  $\varepsilon^{-1}$ , siehe die zweite der mittleren Skizzen in Abb. 5.6(b), und  $I_1$  geht ebenfalls gegen unendlich.

Dementsprechend wird die numerische Berechnung von  $I_1$  und  $I_2$  für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial \Xi(\theta) \setminus \partial_1 \Xi(\theta)$  immer schwieriger, da die Singularitäten der Integranden am unteren oder am oberen Endpunkt  $\varepsilon_a$  bzw.  $\varepsilon_b$  des Integrationsintervalls immer stärker werden, (oder eben der Integrand im zuletzt beschriebenen Fall im Innern von  $[\varepsilon_a, \varepsilon_b]$  gegen unendlich geht), wohingegen die numerische Berechnung von  $I_1$  und  $I_2$  von  $\partial \Xi(\theta)$  weg unproblematisch ist.

Für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial_1 \Xi(\theta)$  gehen die Singularitäten bei  $\varepsilon_a$  und  $\varepsilon_b$  ebenfalls gegen die Form  $\varepsilon^{-1}$ , jedoch geht gleichzeitig die Länge  $\varepsilon_b - \varepsilon_a$  des Integrationsintervalls gegen Null. Hier gilt nach [Sch84], Lemma 3.2, formuliert mit unseren Bezeichnungen folgendes:

**Lemma 5.7** *Es sei  $\sigma(\cdot; \theta) \in C^2(\mathbb{R})$  und  $\sigma(m; \theta) < 0$  (mit letzterem ist  $I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta)$  für  $\varepsilon_a \nearrow m$  und  $\varepsilon_b \searrow m$  wohldefiniert). Dann gilt*

$$I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\sigma_\varepsilon(m; \theta)}} \quad \text{für } \varepsilon_a \nearrow m \text{ und } \varepsilon_b \searrow m. \quad (5.43)$$

Dieses Lemma beschreibt uns das Verhalten von  $I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) \rightarrow \partial_1 \Xi(\theta)$  mit Ausnahme der Punkte  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \pm l_{1,2}(\theta)$ , sowie für  $\theta = \theta_M$  des Punktes  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 0$ , in welchen  $\sigma_\varepsilon(\varepsilon_a; \theta) = 0$  gilt. Man beachte, daß (5.43) die Konsistenz der Behandlung von (5.27) als Bifurkationsproblem in Abschnitt 5.1 und mittels der Time-Map zeigt, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\mu}} I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) &\rightarrow \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\sigma_\varepsilon(m; \theta)}} \quad \text{für } \varepsilon_a \nearrow m \text{ und } \varepsilon_b \searrow m \\ \Leftrightarrow -\sigma_\varepsilon(\varepsilon; \theta) = \mu k^2 \pi^2 &\Leftrightarrow \lambda(m; \theta) = k^2 \pi^2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Der Beweis des Lemma in [Sch84] beruht auf einer trickreichen Reparametrisierung des Integrationsintervalls, dem Mittelwertsatz und auf der Formel  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{\pi}{2}$ , und liefert im Fall  $\sigma_\varepsilon(m; \theta) = 0$  das Ergebnis  $I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) \rightarrow \infty$  für  $\varepsilon_a \nearrow m$  und  $\varepsilon_b \searrow m$ .

Ein weiteres wichtiges Resultat der Reparametrisierung des Integrationsintervalls ist, [Sch84], Theorem 3.3, daß  $I_1(\cdot; \theta)$  in einer Umgebung eines  $m$  mit  $\sigma_\varepsilon(m; \theta) > 0$  differenzierbar von  $\varepsilon_a$  und  $\varepsilon_b$  abhängt. Diese Analysis wird nun in z.B. [SZ93] und in [Zhe95], Kapitel 5, fortgeführt, wobei  $\Psi(\cdot)$  als double-well Potential vorausgesetzt wird, und wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen<sup>5</sup>:

**Bemerkung 5.6** Speziell für  $\Psi(\varepsilon) = \frac{1}{4}(\varepsilon^2 - 1)^2$ , und damit für  $\Psi$  analytisch, wird in [SZ93] gezeigt, daß  $I_1$  und  $I_2$  über den Zusammenhangskomponenten von  $\Xi$  analytisch von  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  abhängen. Damit sind für jedes  $n$  die  $n$ -Abschnitt-Lösungen des (5.27) entsprechenden Randwertproblems

$$\varepsilon'' = \varepsilon^3 - \varepsilon - s, \quad \varepsilon'(0) = \varepsilon'(1) = 0, \quad \int_0^1 \varepsilon dx = l \quad (5.45)$$

<sup>5</sup>eine mögliche Abhängigkeit von einem Parameter wie  $\theta$  unterdrücken dabei

durch die Schnittpunkte zweier nicht identischer analytischer Kurven (passenden Höhenlinien von  $I_1$  und  $I_2$ ) auf beschränktem Gebiet in der  $\varepsilon_a$ - $\varepsilon_b$ -Ebene gegeben, sodaß nach dem Identitätssatz für Potenzreihen nur endlich viele Lösungen existieren, und diese liegen damit isoliert in  $H_N^1(0, 1)$ . Dabei ist  $I_1$  nach unten beschränkt (ebenso bei uns  $I_1(\cdot; \theta)$  für festes  $\theta$ , siehe (5.46)), sodaß  $n$ -Abschnitt-Lösungen nur für  $n$  kleiner einem  $n_{\max}$  existieren, und damit existieren insgesamt nur endlich viele Lösungen von (5.45).

Zumindest im Falle  $\Psi(\cdot, \theta)$  analytisch in  $\varepsilon$  scheint dieses Vorgehen auf das von uns behandelte Problem übertragbar zu sein, d.h. wir behaupten, daß in diesem Fall  $I_1$  und  $I_2$  über jeder Zusammenhangskomponente von  $\Xi(\theta)$  analytisch von  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  abhängen. Damit hätten wir schließlich (für festes  $l$  und  $\theta$ ) die Isoliertheit der stationären Lösungen bewiesen. Hierauf verzichten wir jedoch, unter anderem mit Rücksicht auf den bereits beträchtlichen Umfang dieses Kapitels. Eine erste Schwierigkeit liegt ferner darin, daß die in [Sch84] eingeführte Reparametrisierung von  $[\varepsilon_a, \varepsilon_b]$  voraussetzt, daß zwischen  $\varepsilon_a$  und  $\varepsilon_b$  genau eine Nullstelle von  $\sigma(\varepsilon; \theta) - s$  liegt, was im Falle eines triple-well- $\Psi$  im allgemeinen nicht der Fall ist. □

In den Abb. 5.8 und 5.9 sind nun die Ergebnisse der Berechnung von  $I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta)$  und  $I_2(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta)$  über  $\Xi(\theta)$  für  $\theta = \theta_M$  und  $\theta = 360$  unter Verwendung der Mathematica-Routine `NIntegrate` dargestellt.

Die numerische Integration wurde stets abgebrochen, wenn bei maximal 6-facher rekursiver Verfeinerung der Stützstellen zu  $\varepsilon_a$  und  $\varepsilon_b$  hin (`MaxRecursion->6`) das Integral nicht auf mindestens 8-Stellen genau konvergierte (`PrecisionGoal->8`). Hieraus, sowie aus der Tatsache, daß die Mathematica-Routine `Plot3d` nur mit fester Schrittweite arbeiten kann, resultiert das (zu große) Loch in Abb.5.7(a1) bei  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 0$ , sowie die etwas unschönen Zacken in den globalen Darstellungen Abb. 5.8(a1),(b1) und die mangelhafte Berechnung zu den Rändern  $\partial_2\Xi$ ,  $\partial_3\Xi$  und  $\partial_4\Xi$  hin. Aus diesem Grund haben wir den großen Abbildungen jeweils die kleinen (a2),(a3) und (b2),(b3) angeheftet, die beispielhaft das Verhalten von  $I_1$  bei  $P_M(\theta)$  verdeutlichen sollen, welches uns ab Abschnitt 5.4 besonders interessieren wird. Man beachte, daß wir in diesen Abbildungen jeweils die sehr kleinen Ausschnitte  $[\varepsilon_-(\theta)/(1+10^{-7}), \varepsilon_-(\theta)/(1+10^{-6})] \times [\varepsilon_+(\theta)/(1+10^{-6}), \varepsilon_+(\theta)/(1+10^{-7})]$  mit einer Seitenlänge von ungefähr  $10^{-7}$  betrachten.

Auch bei der Berechnung der Höhenlinien in den Abb.5.8(c1) und (c2) tut sich Mathematica aus den genannten Gründen schwer. Dennoch werden wir diese im nächsten Unterabschnitt zur Interpretation des globalen Bifurkationsverhaltens verwenden, und deshalb hier nicht weiter kommentieren. In Abb.5.9 folgt das Verhalten von  $I_2(\cdot; \theta)$  über  $\Xi(\theta)$  für  $\theta = \theta_M$  und  $\theta = 360$ . Dabei ist klar, daß  $I_2$  (bis auf den Fall  $\varepsilon_a = -\varepsilon_b$ ) analog zu  $I_1$  für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial\Xi(\theta) \setminus \partial_1\Xi(\theta)$  singularär wird, da der Integrand von  $I_2$  zu den Rändern des jeweiligen Integrationsintervalls  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  die gleiche Struktur wie der von  $I_1$  aufweist. Anschaulich gesprochen werden die Singularitäten des Integranden von  $I_1$  in  $I_2$  mit  $\varepsilon_a$  bzw.  $\varepsilon_b$  gewichtet. Eine wesentliche Konsequenz hieraus ist, daß  $I_2$  (für  $\theta < \theta_E$ ) in jeder Umgebung von  $P_M(\theta)$  jeden beliebigen Wert annimmt, da wir die Gerade  $g$  nahe  $P_M(\theta)$  stets ein wenig so verschieben können, daß die Singularität von  $(\Psi - g)^{-1/2}$  bei  $\varepsilon_a < 0$  oder die bei  $\varepsilon_b > 0$  überwiegt, und für  $\varepsilon_a = -\varepsilon_b$  heben sie sich gegenseitig auf.

In den Plots von Abb.5.9 krankt dabei die Darstellung wieder daran, daß Mathematica

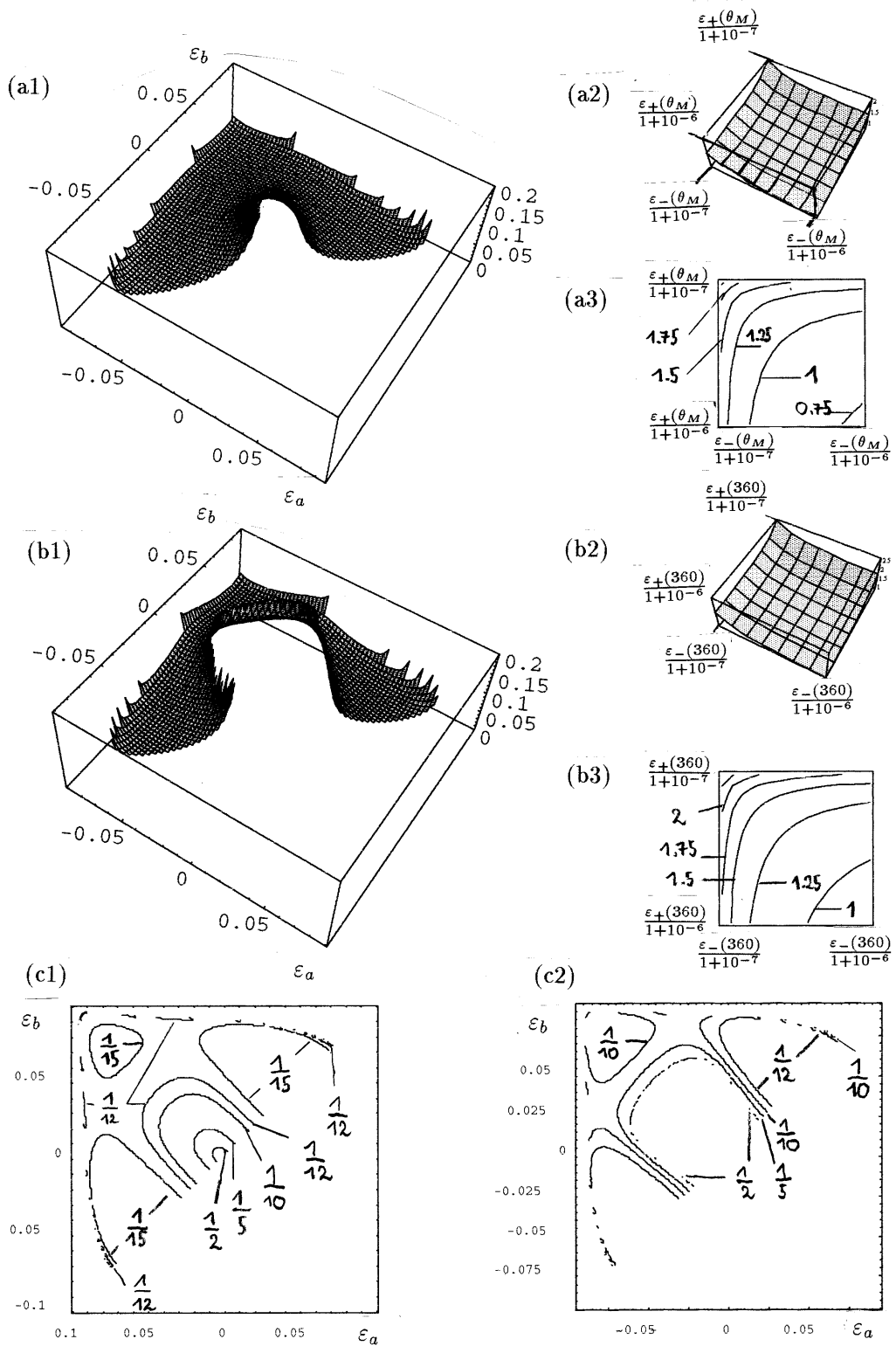


Abbildung 5.8: Numerische Berechnung von  $I_1(\cdot; \theta)$  über  $\Xi(\theta)$  für  $\theta = \theta_M, \theta = 360$ .

nur mit einem festen Raster arbeitet. Dennoch läßt sich erkennen, wie alle Höhenlinien von  $I_2$  auf  $P_M(\theta)$  zulaufen. Bezüglich des Verhaltens von  $I_2$  nicht nahe  $P_M(\theta)$  lassen wir die Skizzen in Abb.5.9 für sich sprechen.

Schließlich sind noch in Abb.5.10  $I_1$  und  $I_2$  über  $\Xi^+(380)$  geplottet. Da  $I_2$  in  $\Xi^+(380)$  nur noch positive Werte annimmt, erhalten wir hier ein qualitativ wesentlich anderes Verhalten als in den Abb. 5.9(a3) und 5.9(b3), und insgesamt haben sich die Formen der Höhenlinien von  $I_1$  und  $I_2$  aneinander angenähert. Daß die Singularitäten von  $(\Psi - g)^{-1/2}$  im Integranden von  $I_2$  nun mit  $0 < \varepsilon_a < \varepsilon_b$  gewichtet werden, führt anschaulich dazu, daß die entlang von  $\partial_2\Xi^+(380)$  verlaufenden Höhenlinien von  $I_2$  im Vergleich zu denen von  $I_1$  bei Annäherung an  $\partial_3\Xi^+(380)$  „später nach unten abbiegen“.

Insgesamt bemerken wir, daß eine umfassende numerische Diskussion von  $I_1$  und  $I_2$  über ganz  $\Xi(\theta)$  (und für viele verschiedene Temperaturen), welche das eigentliche Ziel des Verfassers für diesen Unterabschnitt war, mit den Mathematica-internen Funktionen kaum möglich ist. Insbesondere für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial\Xi(\theta) \setminus \partial_1\Xi(\theta)$  können die globalen Skizzen kaum mehr leisten, als das beschriebene qualitative Verhalten zu veranschaulichen. Für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial_1\Xi(\theta)$  soll jedoch noch Abb.5.11 zeigen, daß wenn die numerische Integration mit den eingestellten Optionen ein Ergebnis liefert, dieses hinlänglich genau ist. Es ist zunächst  $\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{-\sigma(m; \theta_M)}}$  durchgezogenen dargestellt,  $m \in (0.005, 0.075)$ . Die dazugeplotteten Punkte sind das Ergebnis der numerischen Integration von  $I_1(m, m + 10 \cdot 10^{-4}; \theta_M)$ ,  $m = 0.005, 0.007, \dots, 0.073$ . Für  $m \leq 0.003$ ,  $m \geq 0.075$  konvergierte `NIntegrate` nicht, und ebenso bei Verkleinerung des Integrationsintervalls für weitere  $m \in [0.003, 0.075]$ .

Die aufgeführten numerischen Schwierigkeiten für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial\Xi(\theta)$  führen ferner zu folgender Überlegung bzgl. der Wahl von  $\mu$  für weitere numerische Berechnungen: Da wir insbesondere an  $n$ -Übergangs-Lösungen mit kleinem  $n$  interessiert sein werden, werden wir  $\mu$  im weiteren hinreichend vergrößern müssen, um uns mit  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  so weit von  $\partial\Xi(\theta)$  zu entfernen, daß beim Lösen von (5.25) und (5.26) die Singularitäten der Integranden von  $I_1$  und  $I_2$  noch angemessen integriert werden können.

Je mehr wir jedoch  $\mu$  vergrößern, desto weiter entfernen wir uns von der physikalischen Grundannahme, daß die Grenzflächenenergie klein ist. Mathematisch gesehen bedeutet ein Vergrößern von  $\mu$ , daß wir (bei fester Temperatur) die Menge der nicht-trivialen stationären Lösungen immer weiter vereinfachen, da für

$$n > n_{\max}(\theta, \mu) := \left\lfloor \sqrt{\frac{2}{\mu \min\{I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) : (\varepsilon_a, \varepsilon_b) \in \Xi(\theta)\}}} \right\rfloor \quad (5.46)$$

keine  $n$ -Übergangs-Lösungen mehr existieren. Bei der für Abb.5.8(a1) durchgeführten Rechnung haben wir z.B.  $n_{\max}(\theta_M, 2) = 22$  erhalten, woraus  $n_{\max}(\theta_M, 2 \cdot 10^{-10}) \approx 22 \cdot 10^5$  folgt. Interessanterweise wird dieses Minimum nicht im Innern von  $\Xi(\theta_M)$  angenommen, sondern auf  $\partial_1\Xi(\theta_M)$ , und ist damit gegeben durch die vier Lösungen  $l_{n_{\max}}^{--}, l_{n_{\max}}^{-+}, l_{n_{\max}}^{+-}, l_{n_{\max}}^{++}$  der Gleichung  $-\sigma_\varepsilon(\cdot, \theta_M) = \mu\pi^2 n_{\max}^2$ , siehe auch den nächsten Unterabschnitt.

Dem monotonen Fallen von  $n_{\max}(\theta, \cdot)$  in  $\mu$  entspricht in der  $\theta$ - $l$ -Parameterebene eine Verschiebung der Kurven von Bifurkationspunkten nach links. Ferner ist  $n_{\max}(\cdot, \mu)$  monoton fallend in  $\theta$ , was der ineinandergeschachtelten Form der Kurven von Bifur-

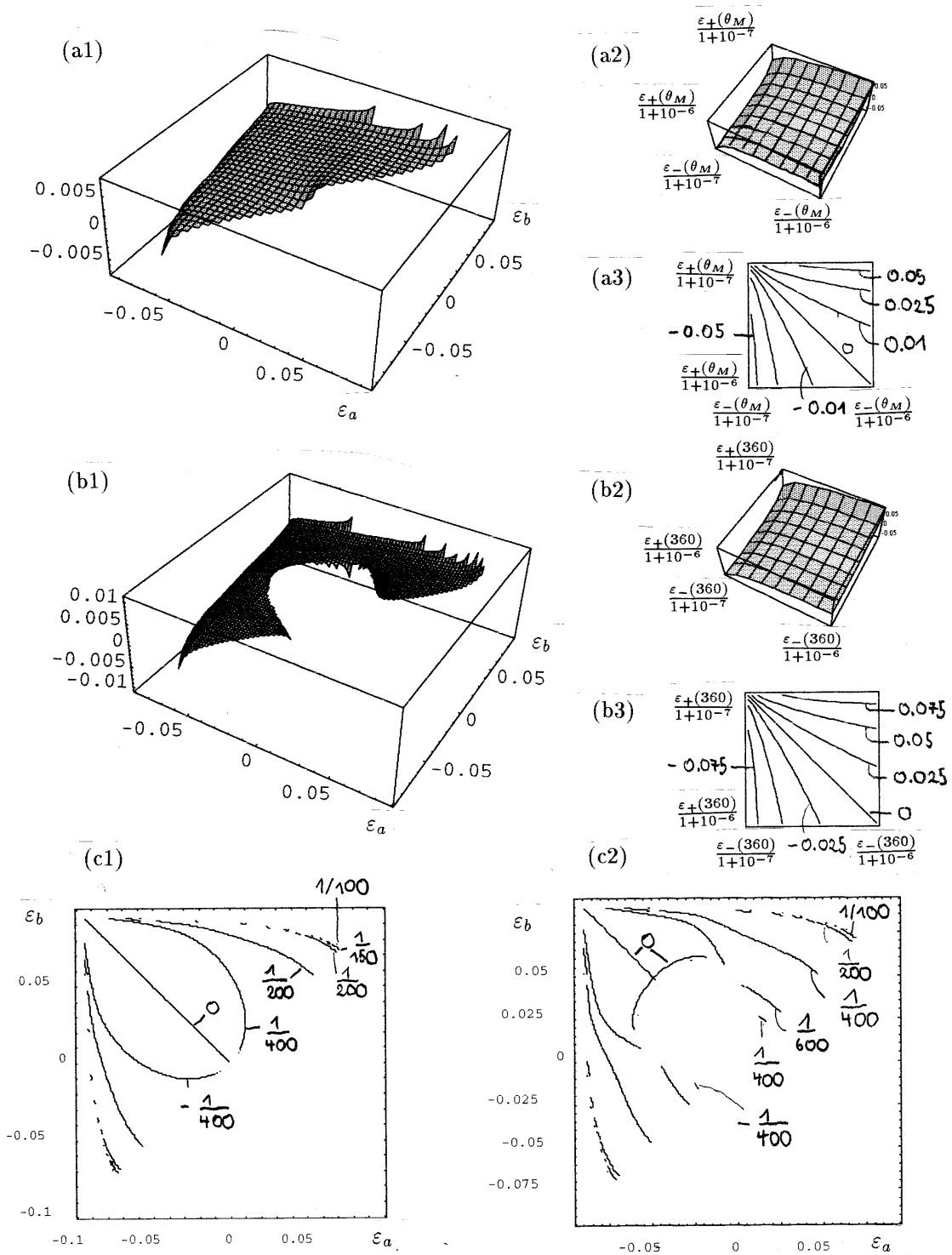


Abbildung 5.9: Numerische Berechnung von  $I_2(\cdot; \theta)$  über  $\Xi(\theta)$  für  $\theta = \theta_M, \theta = 360$ .

(a)  $I_1(\cdot; 380)$  über  $\Xi^+(380)$

(b)  $I_2(\cdot; 380)$  über  $\Xi^+(380)$

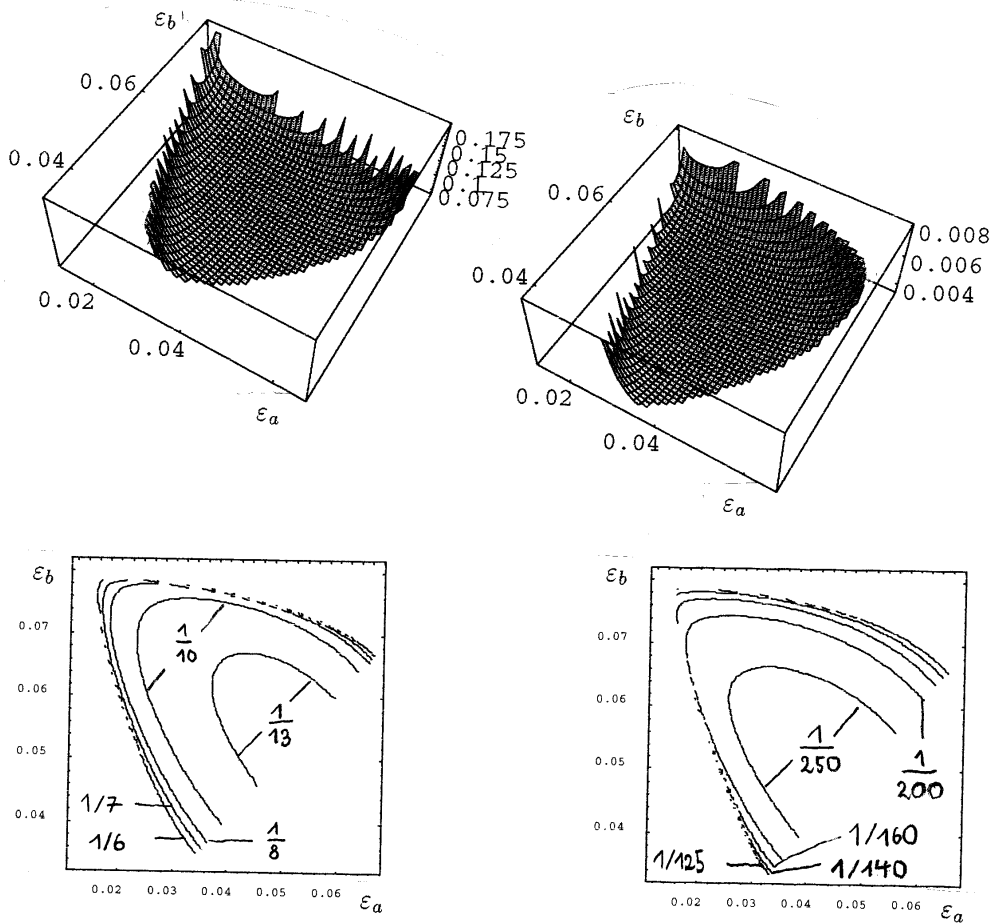


Abbildung 5.10: Numerische Berechnung von  $I_1(\cdot; 380)$  und  $I_2(\cdot; 380)$  über  $\Xi^+(380)$

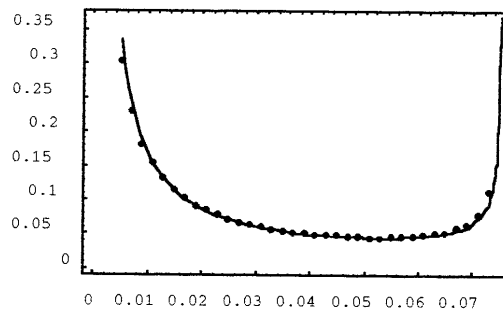


Abbildung 5.11: Vergleich der numerischen Berechnung von  $I_1(m, m + 10^{-4}; \theta_M)$  mit dem analytischen Grenzwert  $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\sigma(m; \theta_M)}}$ .

kationspunkten entspricht, zu beidem vgl. auch Abb.5.1, und insgesamt ist klar, daß  $n_{\max}(\theta, \mu)$  für alle  $\theta$  wohldefiniert und kleiner  $\infty$  ist.

### 5.2.3 Bemerkungen zur globalen Bifurkation II

In diesem Abschnitt interpretieren wir die Höhenlinien von  $I_1$  in den Abb.5.8(c1),(c2) und Abb.5.10(c1) in Hinblick auf die am Ende von Unterabschnitt 5.1.2 formulierte Vermutung zum globalen Verhalten der bifurkierenden Äste. Um eine einfachere Sprechweise zu ermöglichen, denken wir uns dabei  $\mu = 2$ , sodaß eine Höhenlinie zu  $I_1 = 1/n$  konkret einen Ast von  $n$ -Übergangs-Lösungen ergibt. Auf Grund von Abb.5.8(c1) folgern wir nun zunächst für  $\theta = \theta_M$  fest folgendes globales Bifurkationsszenario, und veranschaulichen dieses symbolisch in dem  $\lambda$ - $l$ -Diagramm in Abb.5.12(b), wobei Abb.5.12(a) das zugehörige  $\sigma$ - $l$ -Diagramm vor Augen führen soll. Man beachte, daß nach Lemma 5.7 die im weiteren mit  $l_n^{**}$ ,  $*$   $\in \{-, +\}$  bezeichneten Stellen gegeben sind durch Lösungen von

$$-\sigma_\varepsilon(\cdot; \theta) = n^2 \pi^2, \quad (5.47)$$

was den Zusammenhang der Abb.5.8(c1),(c2) und 5.10(c1) zu Abschnitt 5.1.2 liefert.

- (i) Betrachten wir zunächst die in Abb.5.8(c1) halbkreisförmig um  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 0$  herumlaufenden Höhenlinien von  $I_1$  zu  $I_1 = \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 5, 10, 12$  so starten diese jeweils an dem Punkt  $\varepsilon_a = \varepsilon_b =: l_n^{+-} < 0$  aus dem trivialen Lösungsast  $\{\varepsilon \equiv l\}$  und kehren in  $\varepsilon_a = \varepsilon_b =: l_n^{-+} > 0$  zu diesem zurück. In diesem Sinne sind die Punkte  $l_n^{+-}$  und  $l_n^{-+}$  in Abb.5.12(b) durch einen Ast von  $n$ -Übergangs Lösungen verbunden.
- (ii) Ferner erhalten wir in Abb.5.8(c1) genau drei Höhenlinien zu  $I_1 = \frac{1}{15}$ , die ein qualitativ wesentlich anderes Verhalten als die in (i) aufweisen. Die erste sei die geschlossene Kurve ohne Verbindung zum trivialen Lösungsast. Für diese folgern wir, daß die zugehörigen Lösungen auf keinem Ast liegen, der aus den trivialen Lösungen bifurkiert (bei  $\theta = \theta_M$  fest).

Die beiden anderen Höhenlinien zu  $I_1 = \frac{1}{15}$  verbinden nun jeweils unterschiedliche Punkte auf dem trivialen Ast, die jedoch jeweils nicht symmetrisch zu  $l = 0$  liegen. Stattdessen sind jeweils die Punkte  $l_{15}^{--}$  und  $l_{15}^{++}$  bzw.  $l_{15}^{+-}$  und  $l_{15}^{-+}$  in Abb.5.12(b) durch Äste von 15-Übergangs-Lösungen miteinander verbunden. Dabei ist  $n = 15$  das kleinste  $n$  bei dem wir dieses Verhalten erhalten haben. Entsprechende verbundene Äste erhalten wir für alle  $n = 15, \dots, n_{\max}(\theta_M, \mu)$ ,  $n_{\max}(\theta_M, \mu) = 22$ .

- (iii) Schließlich deuten die auf Grund der numerischen Schwierigkeiten in Abb.5.8(c1) jeweils sehr kurzen Höhenlinienabschnitte nahe  $\partial\Xi(\theta_M) \setminus \partial_1\Xi(\theta_M)$  die Verbindung der Punkte  $l_{12}^{--}$  und  $l_{12}^{++}$  in Abb.5.12(b) durch einen Ast von 12-Übergangs-Lösungen an. Entsprechend sind für alle  $k = 1, \dots, 14$  jeweils die Punkte  $l_n^{--}$  mit  $k = 1, \dots, 14$  durch solche einmal um die inneren Bifurkationsäste herumlaufenden Äste miteinander verbunden.

Für  $\theta = \theta_M$  tritt also bei  $n = 15$  ein ausgesprochener Wechsel des globalen Bifurkationsverhaltens tritt. Für  $\theta = 360$  hat das entsprechende  $n$  den Wert 10, siehe Abb.5.8(c2). Bezeichnen wir nun dieses jeweilige  $n$  als  $n_0(\theta)$ , so wäre in einem nächsten



Schritt interessant, zu untersuchen, wie dieses  $n$  von  $\theta$  abhängt. Dabei hat  $\theta = \theta_M$  zunächst insofern eine Sonderstellung als daß für  $\theta > \theta_M$  die Gleichung (5.47) für  $1 \leq n \leq n_{\max}$  stets genau vier Lösungen hat. Für  $\theta < \theta_M$  hebt sich das Minimum  $-\sigma_\varepsilon(0, \theta)$ , von  $-\sigma_\varepsilon(\cdot, \theta)$ , sodaß (5.47) für kleine  $n$  nur noch genau zwei Lösungen  $l_n^-$  und  $l_n^{++}$  hat, und diese müssen durch einen Ast von  $n$ -Übergangs-Lösungen verbunden sein.

Ferner existiert ein  $\theta_M < \theta^* < \theta_E$ , sodaß  $\Xi(\theta)$  für  $\theta > \theta^*$  den Zusammenhang verliert, vgl. Abb.5.6 von (b) nach (c). Deshalb sind für  $\theta > \theta^*$  stets Punkte  $l_n^-$  und  $l_n^{++}$  bzw.  $l_n^{+-}$  und  $l_n^{++}$  miteinander durch Äste von  $n$ -Übergangs-Lösungen miteinander verbunden. Dies ist für  $\theta = 380$  in Abbildung 5.12(d) skizziert, vgl. die Höhenlinien von  $I_1(\cdot; \theta)$  in Abb.5.10(c1).

Eine weitere Konsequenz aus dem Zerfall von  $\Xi(\theta)$  für  $\theta^* < \theta$  ist, daß für  $\theta^* < \theta < \theta_E$  die  $n$ -Übergangs-Lösungen nahe  $P_M(\theta)$  (vgl. Abb.5.6(c)), die uns für den Rest dieses Kapitels besonders interessieren werden, wie auch die zur ersten in (ii) beschriebenen Höhenlinie von  $I_1 = \frac{1}{15}$  gehörenden Lösungen nicht auf einem bei festem  $\theta$  aus den trivialen Lösungen verzweigenden Lösungsast liegen.

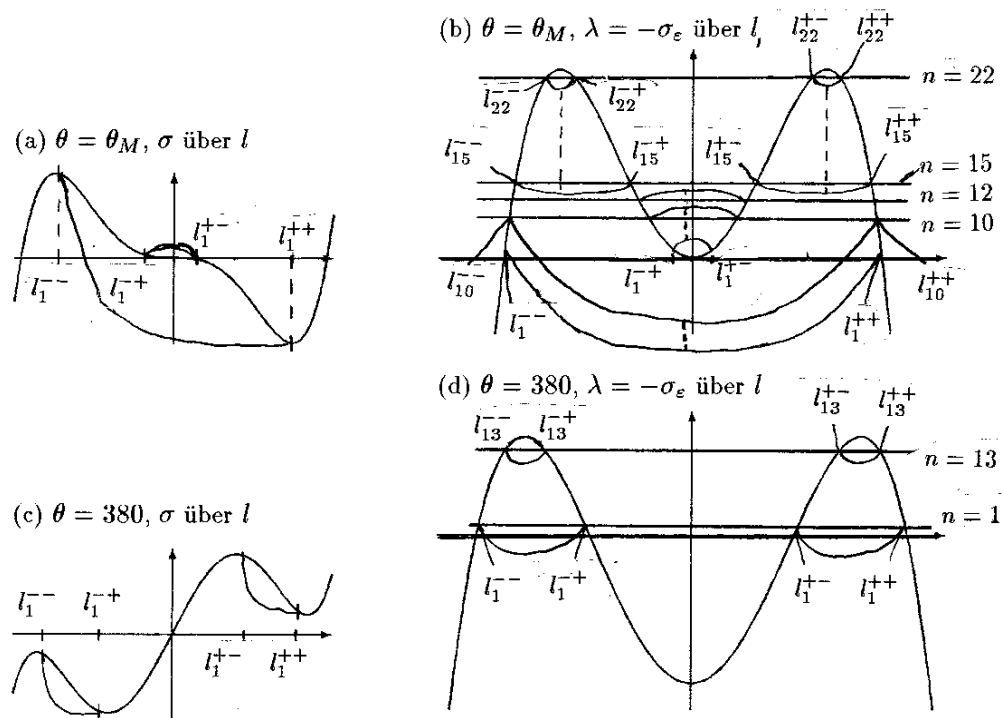


Abbildung 5.12: Skizzen des behaupteten globalen Bifurkationsszenario

**Bemerkung 5.7** Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits erwähnt, werden wir die Behandlung von (5.1) als globales Bifurkationsproblem unter Verwendung der Time-Map nicht mehr vertiefen, und damit die obigen großteils aus der numerischen Berechnung von  $I_1$  abgeleiteten Folgerungen in dieser Arbeit nicht mehr analytisch überprüfen, sodaß diese primär *Behauptungen darstellen*.

Dennoch haben wir gezeigt, wie für festes  $\theta$  die Time-Map sowohl analytisch als auch in gewissem Maße numerisch eine globale Charakterisierung der bifurkierenden Äste von  $n$ -Übergangslösungen ermöglicht. Man beachte noch, daß nach Berechnung einer Höhenlinie  $\mathcal{C}$  der Time-Map in (numerisch) einfacher Weise  $l$  entlang von  $\mathcal{C}$  durch Auswertung der Dehnungs-Map berechnet werden kann, und damit z.B. auch der Typ einer Verzweigung aus einem Punkt  $l_k^{**}$ ,  $*$   $\in \{-, +\}$ . B

Im nächsten Abschnitt präsentieren wir noch einige konkrete  $n$ -Übergangs-Lösungen und schließen damit die numerischen Berechnungen für dieses Kapitel ab.

### 5.3 Numerische Beispiele für $n$ -Übergangs-Lösungen

Zur konkreten Berechnung einiger  $n$ -Übergangs-Lösungen schränken wir uns zunächst auf den Fall  $\theta < \theta_E$ ,  $l = 0$ ,  $s = 0$  ein. Damit erhalten wir sofort  $\varepsilon_a = -\varepsilon_b$ , und für jede Wahl von  $\Psi(0, \theta) > c > \Psi(\varepsilon_-(\theta), \theta)$  sind (5.22), (5.24) und trivialerweise auch die Bedingung (5.26) erfüllt. In Abb.5.13 ist nun für  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$  und  $\theta = 360$  das Verhalten von  $I_1$  eingeschränkt auf  $\Xi(360) \cap \{\varepsilon_a = -\varepsilon_b\}$ , also  $I_1(-\varepsilon_b, \varepsilon_b; \theta)$  geplottet, wobei für  $(-\varepsilon_b, \varepsilon_b) \rightarrow \partial_4 \Xi(360)$  und  $(-\varepsilon_b, \varepsilon_b) \rightarrow P_M(360)$  die Plotschrittweite stark verkleinert wurde, und noch einmal das ausgesprochen singuläre Verhalten von  $I_1$  für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \partial \Xi(\theta) \setminus \partial_1 \Xi(\theta)$  deutlich wird.

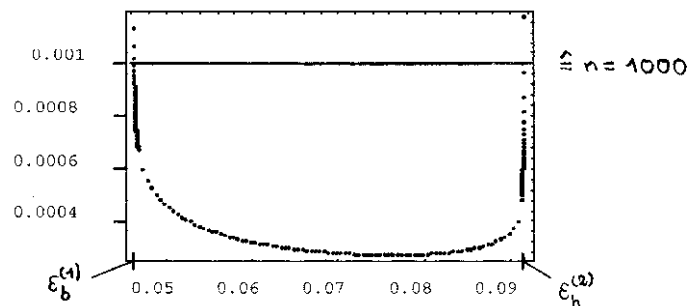


Abbildung 5.13:  $I_1(-\varepsilon_b, \varepsilon_b; 360)$ ,  $\varepsilon_b^{(1)}$ ,  $\varepsilon_b^{(2)}$ , sodaß wir 1000-Übergangs-Lösungen erhalten für  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$ .

Bei der Rechnung für Abb.5.13 haben wir  $\min\{I_1(-\varepsilon_b, \varepsilon_b; 360) : (-\varepsilon_b, \varepsilon_b) \in \Xi(\theta)\} \approx 0.000275$  erhalten, woraus  $n_{\max}(360, 2 \cdot 10^{-5})|_{\{\varepsilon_a = -\varepsilon_b\}} \approx 3636$  folgt. Man erhält dann für jedes  $1 \leq n \leq 3636$  genau zwei Lösungen  $\varepsilon_b^{(1)}$  und  $\varepsilon_b^{(2)}$  von (5.25) und damit  $n$ -Übergangs-Lösungen unterschiedlicher Art, deren Formen sich für  $n \rightarrow n_{\max}$  einander annähern, und deren Eigenschaften man für kleine  $n$  wie folgt charakterisieren kann: Bei der ersten Sorte gilt  $\varepsilon_-(\theta) < \varepsilon_a \approx \varepsilon_-(\theta)$ ,  $\varepsilon_b \approx \varepsilon_+(\theta)$  und damit  $\Psi(\varepsilon_+, \theta) < c \approx \Psi(\varepsilon_+, \theta)$ . Die Gerade  $g$  aus Lemma 5.4 ist (für kleine  $n$ ) nahe der Maxwell-Linie  $g_M$ , und  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  ist nahe dem Maxwell-Punkt  $P_M(\theta)$ . Der Draht ist im wesentlichen in den beiden Martensit-Phasen, und die Übergänge zwischen der  $M_-$ -Phase (d.h.  $\varepsilon$  nahe bei  $\varepsilon_a$ ) und der  $M_+$ -Phase ( $\varepsilon$  nahe  $\varepsilon_b$ ) geschehen innerhalb sehr dünner Übergangsbereiche. Diese Lösung wollen wir als  $n$ - $M_-$ - $M_+$ -Phasenübergang bezeichnen.

Bei der zweiten Sorte gilt  $\Psi(0, \theta) > c \approx \Psi(0, \theta)$ , und die Lösung besteht aus größeren Gebieten in der Austenit-Phase mit dünnen Martensitgebieten an den Rändern und

weiteren dünnen Martensitgebieten im Innern für  $n > 1$ , was wir fortan als  $n$ - $M_-$ - $A$ - $M_+$ -Lösung bezeichnen. Dabei wird kein „echtes“ Martensit erreicht, sondern die Lösung bleibt nahe der Austenit-Phase.

Wir geben nun durch numerische Integration mit einer Art Schießverfahren berechnete Beispiele von 1000-Übergangs-Lösungen,  $n$ -Übergangs-Lösungen für wesentlich kleinere  $n$  konnten wir nicht numerisch sinnvoll berechnen. Dazu gehen wir wie folgt vor: für feste Temperatur  $\theta$  und feste  $l$  und  $s$  (zunächst  $l = s = 0$ ) wird (anfangs durch Ablesen aus Abb.5.13)  $\varepsilon_a$  gewählt, woraus sich sofort  $c$  ergibt. Dann wird (5.30) mit dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit Schrittweitensteuerung und Anfangsbedingung  $\varepsilon(0) = 0$  von  $x = 0$  bis  $x = 0.0005$  integriert. Diese Lösung  $\tilde{\varepsilon}$  von (5.30) wird akzeptiert, wenn bei  $x = 0.0005$  erstmalig  $\varepsilon' = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{\Psi - c} < 10^{-6}$  gilt, andernfalls wird  $\varepsilon_a$  geeignet modifiziert. Da im Fall  $l = s = 0$ ,  $f$  symmetrisch ist, wird dann  $\varepsilon : [0, 0.001] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon(x) = \tilde{\varepsilon}(x - 0.005)$  für  $x \geq 0.0005$  und  $\varepsilon(x) = -\tilde{\varepsilon}(0.001 - x)$  für  $0 \leq x \leq 0.0005$  als 1-Übergangs-Lösung für  $x \in [0, 0.001]$  betrachtet. Durch Anfügen der entsprechenden negativen/positiven Abschnitte erhalten wir schließlich  $n$ -Übergangs-Lösungen auf  $[0, n \cdot 0.001]$ , wobei wir uns in den folgenden Abbildungen stets auf das Intervall  $[0, 0.001]$  einschränken.

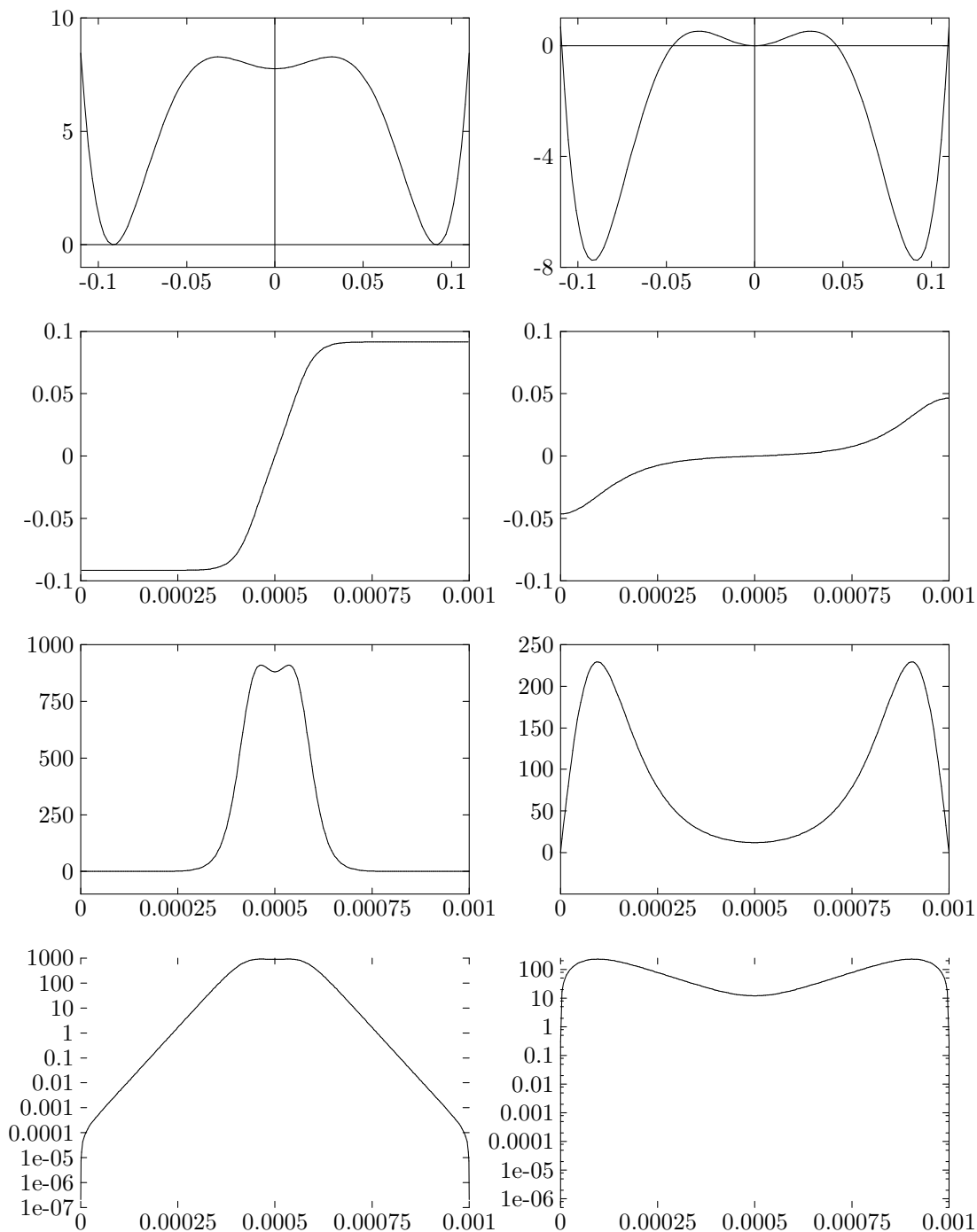
Für  $\theta = 360$  und  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$  zeigt Abb.5.14 die ersten beiden Beispiele für die beiden beschriebenen „Sorten“ von Lösungen. Es sind von oben nach unten jeweils  $\Psi(\cdot; 360) - c$ , die Verzerrung  $\varepsilon$ , die Krümmung  $\varepsilon'$  sowie  $\varepsilon'$  mit logarithmischer Skalierung dargestellt. Diese letzte Darstellung soll das Verhalten von  $\varepsilon'$  zu den Rändern hin verdeutlichen. Dazu geben wir die wichtigen Größen wie folgt an, (gerechnet wurde mit 18 Stellen Genauigkeit):

- in (a) gilt:  $c - \Psi(0, 360) = -7.75589 \approx \Psi(\varepsilon_-(360), 360) - \Psi(0, 360)$ ,  
 $c - \Psi(\varepsilon_-(360), 360) \approx 0.3 \cdot 10^{-12}$ ,  $\varepsilon_a - \varepsilon_-(360) = 0.63 \cdot 10^{-8}$ .
- in (b) gilt:  $c - \Psi(0, 360) = -0.14458 \cdot 10^{-2}$  und  $\varepsilon_a = -0.0464$ .

Ferner gilt in (a)  $\sigma(\varepsilon_a) - s = \sigma(\varepsilon_a) > 0$  und  $\sigma(\varepsilon_b) = -\sigma(\varepsilon_a) < 0$  (in Erfüllung von (5.24)), und in (b) ((5.22) entsprechend)  $f(0; 0, c) = -c > 0$ , was beides in der graphischen Darstellung nicht mehr zu erkennen ist.

Als nächstes folgen zwei Beispiele für nichttriviale stationäre Lösungen bei  $l = 0.02$ ,  $\theta = 365$  und  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$ . Wieder geben wir zwei verschiedene Lösungen an, wobei es sich (wegen den wiederholt geschilderten numerischen Schwierigkeiten für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow \Xi(\theta)$ ) als einfacher erwies, jeweils 2000-Übergangs-Lösungen zu finden. Zuoberst sind in Abb.5.15 nun jeweils  $\Psi(\cdot; \theta) - \Psi(0; \theta)$  und die Gerade  $g$  dargestellt. Es folgen die sich ergebende Verschiebung  $u(x) = \int_0^x \varepsilon(\xi) d\xi$ , die Verzerrung  $\varepsilon$  und die Krümmung  $\varepsilon'$ . Man beachte, daß bei  $x = 0.001$  die Verschiebung jeweils  $u(0.001) = 0.00002$  erreicht, sodaß bei  $x = 1$  die Verschiebung  $u(1) = 0.02$  erreicht wird. Es gilt

- in (a)  $c - \Psi(0, 365) = 3.8667 \approx \Psi(\varepsilon_-(365), 365)$ ,  $s = 0.398$ ,  $\varepsilon_a = -0.08579$ ,  
 $\varepsilon_b = 0.0884$ ,  $\varepsilon_+ - \varepsilon_b = 0.61 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_- - \varepsilon_a = 0.0027$
- in (b)  $c - \Psi(0, 365) = 0.0668$ ,  $s = 20.35$ ,  $\varepsilon_a = 0.00757$  und  $\varepsilon_b = 0.0487$ .

(a)  $1000-M_-M_+$ -Phasenübergang,  
 $g$  nahe der Maxwell-Linie(b)  $1000-M_-A-M_+$ -Phasenübergang, Lösung bleibt nahe  $A$ -PhaseAbbildung 5.14: Zwei  $1000$ -Übergangs-Lösungen für  $\theta = 360$ ,  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $l = s = 0$ , im einzelnen siehe Text.

(a) 2000- $M_-$ - $M_+$ -Lösung mit  $M_+$   
Übergewicht,  $g$  nahe der Maxw.-Linie

(b) Lösung bleibt näher der  $A$ -Phase,  
nur positive Verzerrungen

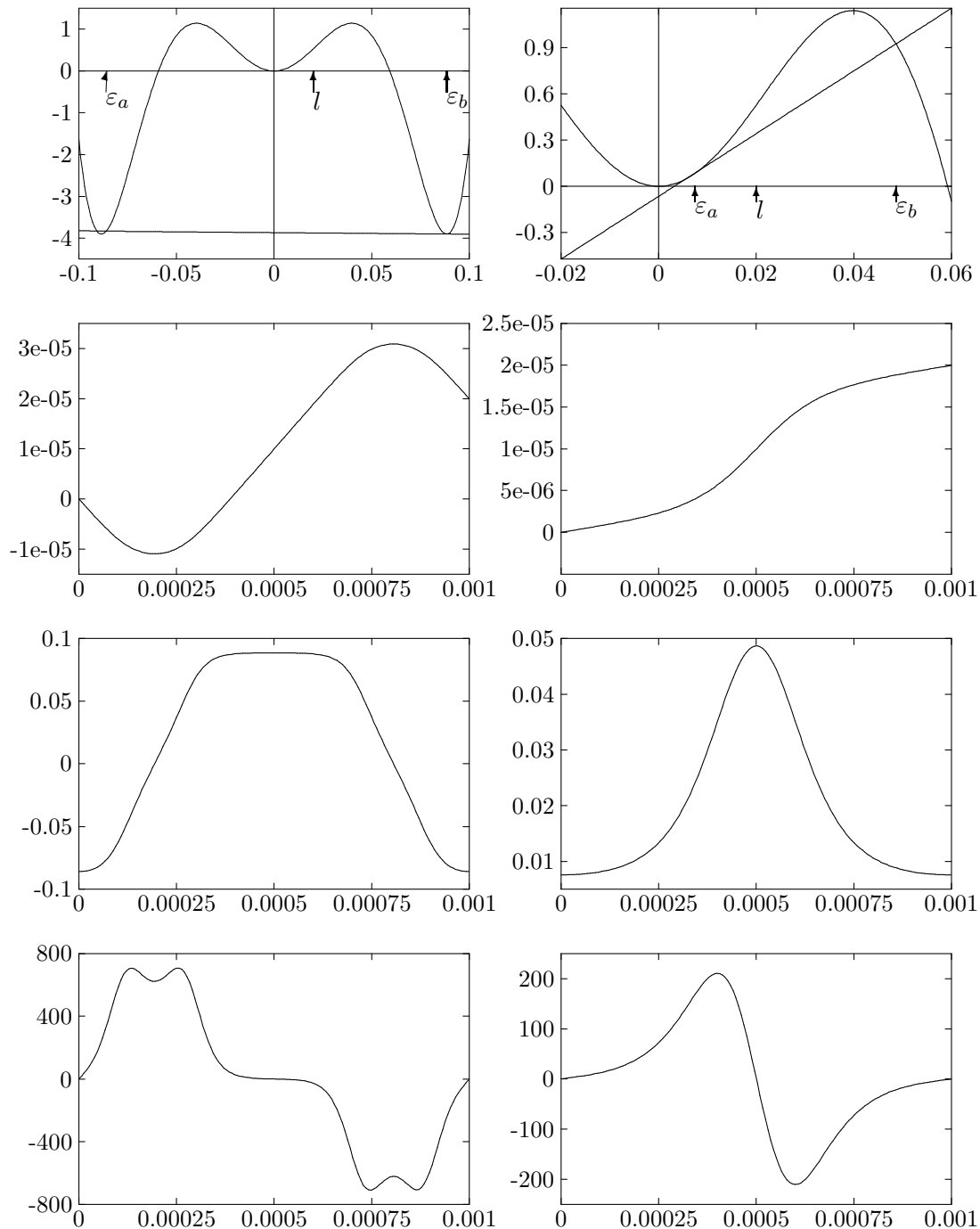


Abbildung 5.15: Zwei 2000-Übergangs-Lösungen für  $\theta = 365$ ,  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $l = 0.02$ , im einzelnen siehe Text.

Schließlich veranschaulichen wir noch Rahmen numerischer Berechnungen, wie sich die  $M_-$ - $M_+$ -Lösungen in Abhängigkeit von  $\mu$  verhalten (und für  $\mu \rightarrow 0$  der im nächsten Abschnitt diskutierten Maxwell-Lösung  $\varepsilon_{M,0}(\cdot)$  für  $\mu = 0$  annähern). Nach (5.42) gilt  $x_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , und dies muß demnach auch für die Phasenübergangsgebiete oder Grenzflächen gelten, wobei wir eine solche Grenzfläche definieren als ein Intervall  $(x_l, x_r) \subset [0, 0.001]$ , in dem die Krümmung  $\varepsilon'$  einen vorgegebenen Wert  $\kappa_0$  überschreitet, und wir legen uns hier z.B. auf  $\kappa_0 = 1$  fest. Mit obigem Schießverfahren wurden nun weitere numerische Lösungen für  $l = s = 0$ ,  $\theta = 360$  und für  $\mu = 4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\mu = 6 \cdot 10^{-5}$ ,  $\mu = 8 \cdot 10^{-5}$  berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb.5.16 zusammen mit der bereits berechneten Lösung für  $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$  präsentiert. Mit wachsendem  $\mu$  müssen wir uns dabei von der Maxwell-Linie entfernen, die Lösungen wurden erhalten für folgende Werte für  $c$ :

$\mu$	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 2^{-5}$
$c - \Psi(\varepsilon_-(360), 360)$	$0.3 \cdot 10^{-12}$	$0.1 \cdot 10^{-6}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.1 \cdot 10^{-3}$

Entsprechend wächst  $\varepsilon_a$  mit wachsendem  $\mu$ , was jedoch in Abb.5.16(a) nicht zu erkennen ist. Das wurzelartige Anwachsen der Dicke der Grenzflächen läßt sich in Abb.5.16(b) entlang der Linie  $\varepsilon' = 1$  gut erkennen.

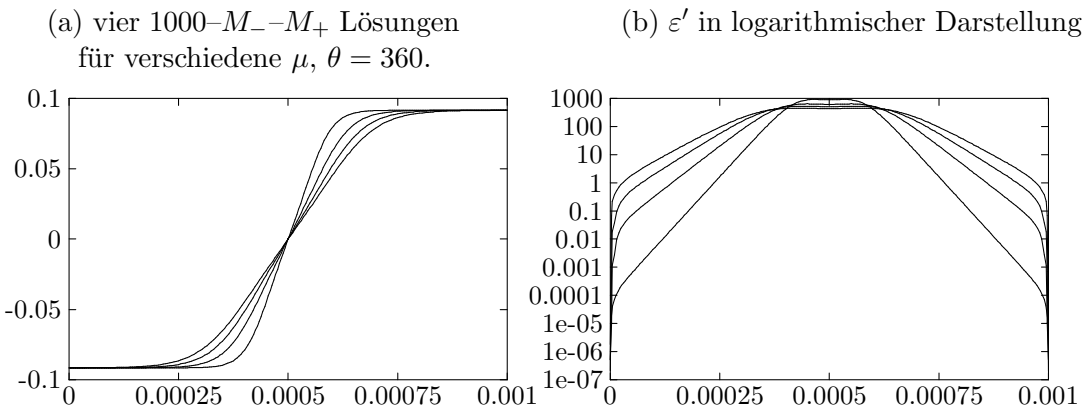


Abbildung 5.16: Aufsteilen der Grenzflächen für  $\mu \rightarrow 0$

## 5.4 Die Maxwell-Lösung für $\mu = 0$

Insgesamt sollten die aufbauend auf Abschnitt 5.2 numerisch berechneten Lösungen in Abschnitt 5.3 vor allem eine Anschauung der Lösungen von (5.27) geben. In diesem Abschnitt kehren wir zur analytischen Behandlung von (5.27) zurück, mit dem Ziel bei gegebenem  $\theta$  stationäre Lösungen mit minimaler freier Energie zu finden. Dazu werden wir zunächst den Fall  $\mu = 0$  untersuchen, d.h. wir suchen stückweise stetige Lösungen  $\varepsilon \in L^1(0, 1)$  von

$$\sigma(\varepsilon, \theta) - s = 0 \quad \text{fast überall,} \quad (5.48a)$$

$$\int_0^1 \varepsilon(\xi) d\xi = l, \quad (5.48b)$$

die zusätzlich die („rein elastische“) freie Energie minimieren sollen, also

$$E_0^{(f)}(\varepsilon, 0, \theta) := \int_0^1 \Psi(\varepsilon(x), \theta) dx \stackrel{!}{=} \min. \quad (5.48c)$$

Dabei erhalten wir (5.48a) als Euler–Lagrange–Gleichung von (5.48c) mit Lagrange–Multiplikator  $s$ , denn sei  $\bar{\varepsilon}$  ein Minimierer und  $F(\eta) = I(\bar{\varepsilon} + \eta\varepsilon, \theta)$  so muß gelten

$$\begin{aligned} F'(\eta)|_{\eta=0} &= \frac{d}{d\eta} \int_0^1 \Psi(\bar{\varepsilon} + \eta\varepsilon, \theta) - s(\bar{\varepsilon} + \eta\varepsilon - l) dx \Big|_{\eta=0} \\ &= \int_0^1 (\sigma(\bar{\varepsilon} + \eta\varepsilon, \theta) - s)\varepsilon dx \Big|_{\eta=0} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

für alle  $\varepsilon \in L^1(0, 1)$  mit  $\int_0^1 \varepsilon dx = 0$ , wobei wir uns bei der Differentiation unter dem Integral selbiges in eine Summe von Integralen zerlegt denken, in denen der Integrand stetig ist. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt (5.48a). Informationen über mögliche Sprünge in  $\varepsilon$  erhält man aus der zweiten Weierstraß–Erdmann–corner (Sprung) Bedingung

$$\Psi(\varepsilon, \theta) - s\varepsilon \quad \text{ist stetig über Sprünge in } \varepsilon, \quad (5.49)$$

die für lokale Extrema von  $E_0^{(f)}$  notwendig erfüllt sein muß. Zusammen ergeben (5.48a) und (5.49) die sogenannten Maxwell–Bedingungen

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon_\beta, \theta) - \Psi(\varepsilon_\alpha, \theta) &= s(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha), \\ s &= \sigma(\varepsilon_\alpha, \theta) = \sigma(\varepsilon_\beta, \theta). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Damit erhalten wir, daß (bis auf Fall  $\theta = \theta_E$ , siehe Bemerkung 5.9) ein Minimierer  $\varepsilon(\cdot)$  entweder konstant sein muß, und damit  $\varepsilon(x) \equiv l$ , oder stückweise konstant mit

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_\alpha, & x \in \Omega_1 \\ \varepsilon_\beta, & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (5.51)$$

wobei  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  disjunkt, meßbar,  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = [0, 1]$ , und  $s, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$  so gewählt sein müssen, daß (5.48b) und (5.49) erfüllt sind. Setzen wir noch  $l_\alpha = |\Omega_1|$  und  $l_\beta = |\Omega_2|$  so folgen aus  $l_\alpha + l_\beta = 1$  und

$$\int_0^1 \varepsilon dx = \varepsilon_\alpha |\Omega_1| + \varepsilon_\beta |\Omega_2| \stackrel{!}{=} l \quad (5.52)$$

die Bedingungen

$$l_\alpha = \frac{\varepsilon_\beta - l}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}, \quad l_\beta = \frac{l - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}, \quad (5.53)$$

und damit wegen  $l_\alpha, l_\beta > 0$  für eine nichtkonstante Lösung notwendigerweise

$$\varepsilon_\alpha < l < \varepsilon_\beta. \quad (5.54)$$

Man beachte nun, daß mit (5.50) und (5.54) zwei der drei in Definition 5.6 genannten Eigenschaften einer Maxwell-Linie erfüllt sind, es fehlt

$$\Psi(\varepsilon, \theta) - s\varepsilon > \Psi(\varepsilon_\alpha, \theta) \quad \text{für } \varepsilon \in (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta). \quad (5.55)$$

Dabei definieren für  $\theta_M < \theta < \theta_A$ , d.h. für  $\Psi$  in triple-well-Form, die in Abb.5.17 skizzierten „Pseudo-Maxwell-Linien“, bzw. ihre Schnittpunkte  $\varepsilon_\alpha^{(i)}, \varepsilon_\beta^{(i)}$  mit  $\Psi$  bei geeigneter Wahl von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  Lösungen von (5.48), so daß (5.50) und (5.54) erfüllt sind. Es ist jedoch klar, daß die so gegebenen Lösungen keine Minima von  $E_0^{(f)}$  darstellen. Ferner verliert eine solche Pseudo-Maxwell-Linie für den Fall  $\mu > 0$  vollständig ihre Bedeutung (da in diesem Fall stets (5.55) gelten muß), im Gegensatz zu einer (der) nach Definition 5.6 gegebene Maxwell-Linie.

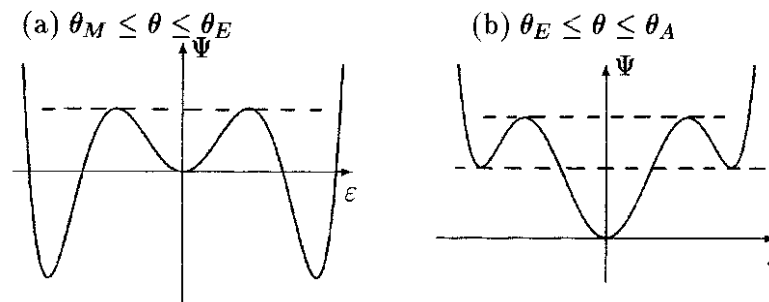


Abbildung 5.17: Pseudo-Maxwell-Linien für  $\theta_M < \theta < \theta_A$ , bei denen die Maxwell-Bedingungen erfüllt sind, die jeweils zugehörigen Lösungen (in der Form (5.51)) von (5.48a), (5.48b) jedoch keine Minima von  $E_0^{(f)}$  liefern.

**Bemerkung 5.8** Die in Bemerkung 5.5 vereinbarte Eindeutigkeit unseres Begriffs der Maxwell-Linie begründen wir nun ebenfalls daraus, daß in einem Fall, wie dem in Abb.5.7(c) skizzierten, offensichtlich die -zu der Linie  $g_M$  gehörigen - Lösungen der Form

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_\alpha, & x \in \Omega_1 \\ \varepsilon_\beta, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

globale Minima von  $E_0^{(f)}$  darstellen. □

**Bemerkung 5.9** In dem Spezialfall  $\theta = \theta_E$  sind die Maxwell-Bedingungen mit den drei Verzerrungen  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_-(\theta_E)$ ,  $\varepsilon_0 = 0$  und  $\varepsilon_\beta = \varepsilon_+(\theta)$  erfüllt, wobei für zugehörige Lösungen der Form

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_\alpha, & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \in \Omega_0 \\ \varepsilon_\beta, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

wiederum (5.53) gelten muß. Auch in diesem Fall wollen wir entsprechend Definition 5.6 und Bemerkung 5.5 die Gerade  $g(\varepsilon) \equiv 0$  in die beiden  $(0, 0)$  und  $(\varepsilon_+(\theta_E), 0)$  bzw.  $(\varepsilon_-(\theta_E), 0)$  und  $(0, 0)$  verbindenden Maxwell-Linien unterteilen. □



Zusammenfassend erhalten wir für ein  $(\theta, l)$ -Wertepaar, für das eine Maxwell-Linie, d.h.  $\varepsilon_\alpha < l < \varepsilon_\beta$  entsprechend Definition 5.6 existieren, unendlich viele Lösungen von (5.48), die von der Form (5.51) sind, und deren (gemeinsame) freie Energie sich berechnet zu

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(\varepsilon; \theta) dx &= l_\alpha \Psi(\varepsilon_\alpha; \theta) + l_\beta \Psi(\varepsilon_\beta; \theta) = l_\alpha (c_0 + s_0 \varepsilon_\alpha) + l_\beta \underbrace{(\Psi(\varepsilon_\alpha; \theta) + s_0(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha))}_{=c_0 + s_0 \varepsilon_\alpha + s_0(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)} \\ &= \underbrace{(l_\alpha + l_\beta)}_{=1} c_0 + s_0 \underbrace{(l_\alpha \varepsilon_\alpha + l_\beta \varepsilon_\beta)}_{=l \text{ nach (5.52)}} = c_0 + s_0 l. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Insbesondere können beliebig viele Sprünge in  $\varepsilon$  auftreten, solange  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  meßbar bleiben. Eine dieser Lösungen ist

$$\varepsilon_{M,0}(x) = \begin{cases} \varepsilon_\alpha & 0 \leq x \leq l_\alpha \\ \varepsilon_\beta & l_\alpha < x < 1 \end{cases} \quad (5.57)$$

mit einem einzigen Sprung in  $\varepsilon$ , und diese Lösung wollen wir im weiteren als *die* Maxwell-Lösung von (5.48a) und (5.48b) oder kurz als die Maxwell-Lösung für  $\mu = 0$  bezeichnen. Von der physikalischen Anschauung her erwartet man nun, daß für kleine  $\mu > 0$ , wenn wir also wieder unsere natürliche Grenzflächenenergie hinzunehmen, folgendes gilt.

**Hypothese 5.8** Es existiert eine nach Lemma 5.4 glatte ( $C^3$ ), zu  $\varepsilon_{M,0}$  „ähnliche“ Lösung  $\varepsilon_{M,\mu}$  von (5.27), bei der der Sprung bei  $l_\alpha$  zu einem schmalen Phasenübergangsgebiet geglättet ist, und minimiert (hier stets bei festem  $\theta$ ) die freie Energie

$$E^{(f)}(\varepsilon, 0; \theta) = E_0^{(f)}(\varepsilon; \theta) + \frac{\mu}{2} \int_0^1 \varepsilon_x^2 dx = \int_0^1 \Psi(\varepsilon; \theta) + \frac{\mu}{2} \varepsilon_x^2 dx \quad (5.58)$$

unter den Lösungen von (5.27). Für diese Lösung sollte die Gerade  $g$  nahe der Maxwell-Linie  $g_M$  liegen, und wir wollen  $\varepsilon_{M,\mu}$  als Maxwell-Lösung für  $\mu > 0$  bezeichnen. Damit wäre wiederum  $\varepsilon_{M,0}$  unter den Lösungen von (5.48) ausgezeichnet, als die Maxwell-Lösung für verschwindende Grenzflächenenergie.  $\square$

Eine Präzisierung von Hypothese 5.8 und der Beweis folgen im nächsten Abschnitt, wobei wir uns auf Ergebnisse aus [CGS84] berufen. Bezüglich der Existenz von  $\varepsilon_{M,\mu}$  haben wir in Abschnitt 5.2 anschaulich gesehen, daß für  $\theta < \theta_E$  die Höhenlinien von  $I_1$  gewissermaßen terrassenförmig zu  $P_M(\theta)$  hin aufsteigen, siehe insbesondere die Abbildungen 5.8(a3) und (b3), wohingegen sich alle Höhenlinien von  $I_2$  bei  $P_M(\theta)$  treffen, sodaß die Existenz einer gemeinsamen Lösung  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  von (5.25) und (5.26) als Schnittpunkt der Höhenlinien von  $I_1 = \sqrt{\mu/2}$  und  $I_2 = l\sqrt{\mu/2}$  insbesondere für  $\theta < \theta_E$  heuristisch klar ist.

Für  $\theta > \theta_E$  ist die Situation weniger klar, siehe die Abb.5.10, und es wird insgesamt darum gehen, das Verhalten von  $I_1(\cdot; \theta)$  und  $I_2(\cdot, \theta)$  nahe  $P_M(\theta)$  analytisch greifbar zu machen.

Der Grund für die Annahme der Minimierung der freien Energie durch  $\varepsilon_{M,\mu}$  wird klar, wenn wir unter Verwendung von (5.29) und (5.27c)  $E^{(f)}(\varepsilon, 0, \theta)$  wie folgt trans-

formieren:

$$\begin{aligned}
E^{(f)}(\varepsilon, 0; \theta) &= \int_0^1 \Psi(\varepsilon, \theta) + \frac{\mu}{2} \varepsilon_x^2 dx \\
&= \int_0^1 \Psi(\varepsilon, \theta) - g(\varepsilon) + \frac{\mu}{2} \left( \frac{2}{\mu} (\Psi(\varepsilon, \theta) - g(\varepsilon)) \right) dx + \underbrace{\int_0^1 c + s\varepsilon dx}_{=c+sl} \\
&= 2n \int_0^{x_1} \{ \Psi(\varepsilon(x); \theta) - g(\varepsilon(x)) \} \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon'(x)} dx + c + sl \\
&= 2n \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{\Psi(\varepsilon, \theta) - g(\varepsilon)}{\sqrt{\Psi(\varepsilon, \theta) - g(\varepsilon)}} d\varepsilon + c + sl \\
&= 2n \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \sqrt{\Psi(\varepsilon, \theta) - g(\varepsilon)} d\varepsilon + c + sl =: I_3(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n; \theta) \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Dabei wird (nach (5.56)) der Term  $c + sl$  gerade minimal für  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \rightarrow (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$ , und das Integral  $\int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \sqrt{\Psi(\varepsilon, \theta) - g} d\varepsilon$ , das in diesem Fall groß wird, ist mit dem Faktor  $2n\sqrt{\mu/2}$  gewichtet. Ersteres besagt, daß die Verzerrung in möglichst großen Gebieten in der Nähe von  $\varepsilon_a$  bzw.  $\varepsilon_b$  liegen sollte um weiterhin den elastischen Anteil  $E_0^{(f)}$  von  $E^{(f)}$  klein halten, und zweiteres, daß  $\varepsilon(\cdot)$  möglichst wenig schwanken sollte, damit  $\frac{\mu}{2} \int_0^1 \varepsilon_x^2 dx$  klein bleibt: mehr als ein ein Übergang von einer Phase zu einer anderen, d.h. mehr als eine Grenzfläche, würde  $\frac{\mu}{2} \int_0^1 \varepsilon_x^2 dx$  nur „unnötig“ erhöhen, ohne  $E_0^{(f)}$  zu verkleinern. Ferner zeigt (5.59), daß auch die freie Energie einer Lösung direkt aus  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  und (dem auch durch  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  gegebenen)  $n$  berechnet werden kann. Die Aufnahme von  $n$  in die Parametrisierung  $G_{\text{nt}}^P(l, \theta)$  ist im Sinne der algorithmischen Berechnung von  $E^{(f)}$  durch  $I_3(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n; \theta)$  motiviert.

## 5.5 Die Maxwell-Lösung für $\mu > 0$

In diesem Abschnitt notieren wir zur Präzisierung und zum Beweis von Hypothese 5.8 Ergebnisse aus [CGS84], die die Integrale  $I_1(\cdot; \theta)$  und  $I_2(\cdot; \theta)$  für  $(s, c)$  nahe  $(s_0, c_0)$  über  $\Sigma(\theta)$  betrachten. Eine Schwierigkeit liegt dabei darin, daß  $\Psi(\cdot; \theta)$  nur für  $\theta < \theta_M$  bzw. für  $\theta_E < \theta < \theta_K$  und eingeschränkt auf positive oder negative Verzerrungen von der in [CGS84] betrachteten Gestalt eines  $C^5$ -double-well Potentials ist. Allerdings haben wir in der in [CGS84] durchgeführten Analysis keine Stelle gefunden, die nicht auf den Fall des triple-well Potentials übertragbar wäre.

Das betrachtete Problem sei nun mit  $(P_{s,\mu})$  (für stationär und  $\mu > 0$ ) bezeichnet und lautet:

$$\text{Minimiere } E^{(f)} = \int_0^1 \Psi(\varepsilon; \theta) + \frac{\mu}{2} \varepsilon_x^2 dx \text{ über } H_l^1 := \{ \varepsilon \in H^1(0, 1) : \int_0^1 \varepsilon dx = l \}.$$

**Bemerkung 5.10** Bezüglich der Existenz und Regularität eines Minimierers  $\bar{\varepsilon}$  gilt dabei: schreiben wir  $F(\varepsilon, \varepsilon_x)$  für den Integranden in  $(P_{s,\mu})$ , so folgt aus der strikten Konvexität von  $F$  in  $\varepsilon_x$ ,

$$F_{\varepsilon_x \varepsilon_x} = \mu > 0, \quad (5.60)$$

daß  $E^{(f)}$  nach unten halbstetig ist bzgl. der schwachen Konvergenz in  $H^1(0,1)$ , siehe z.B. [BMH91], Theorem 3, wir haben also ein grundlegend anderes Verhalten als z.B. in (2.21), und es folgt weiter, daß ein absolutes Minimum  $\bar{\varepsilon}$  mit  $\bar{\varepsilon}$  stückweise  $C^1$  angenommen wird, [BMH91], Theorem 4. Sei nun  $x_0$  eine Sprungstelle von  $\bar{\varepsilon}'$  und  $\bar{\varepsilon}'_{\pm} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}'(x_0 \pm h)$  so muß nach den Weierstraß–Erdmann Bedingungen

$$F_{\varepsilon'}(\bar{\varepsilon}(x_0), \varepsilon_-) = \mu \varepsilon_- \stackrel{!}{=} F_{\varepsilon'}(\bar{\varepsilon}(x_0), \varepsilon_+) = \mu \varepsilon_+$$

gelten, und damit  $\bar{\varepsilon}' \in C^0(0,1)$ . Insgesamt folgt sogar (vgl. [BMH91], Theorem 5), daß  $\bar{\varepsilon} \in C^2(0,1)$  und die zugehörige Euler–Lagrange–Gleichung (5.27a) sowie die (natürlichen) Randbedingungen (5.27b) erfüllen muß.

Damit genügt es, die freien Energien der verschiedenen Lösungen von (5.27) untereinander zu vergleichen, und diejenige mit minimaler freier Energie *muß* ein absolutes Minimum von  $I$  über  $H_l^1$  sein, ohne daß z.B. die Bedingung der Positivität der zweiten Variation überprüft werden muß. Für  $n$ -Übergangs–Lösungen mit  $n \geq 2$ , werden wir auf der anderen Seite zeigen, daß diese in  $H_l^1$  keine lokalen (schwachen) Minimierer von  $E^{(f)}$  darstellen, d.h. in jeder  $H^1(0,1)$ -Umgebung eines solchen  $\varepsilon$  liegt ein  $\tilde{\varepsilon} \in H_l^1$  mit  $E^{(f)}(\tilde{\varepsilon}, 0; \theta) < E^{(f)}(\varepsilon, 0; \theta)$ , sodaß diese als Kandidaten für Minimierer a priori ausscheiden. Dies geschieht in Satz 5.13, und wir werden uns deshalb ab jetzt auf 1-Übergangs–Lösungen konzentrieren. **B**

Durchgehend sei in diesem Abschnitt  $\theta < \theta_K$  fest und die zugehörige Maxwell–Linie gegeben durch  $(s_0, c_0)$ , wobei wir uns im Fall  $\theta > \theta_E$  oBdA auf  $s_0 > 0$ , d.h. auf  $l > 0$  festlegen wollen. Mit den zugehörigen  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$  gemäß Definition 5.6 und für  $\delta > 0$  klein sei weiter

$$L_\delta = [\varepsilon_\alpha + \delta, \varepsilon_\beta - \delta]. \quad (5.61)$$

**Satz 5.9 Existenz der Maxwell–Lösung**, ([CGS84], Theorem 3.1) *Zu gegebenem  $\delta > 0$  existieren ein  $\mu_\delta > 0$  und eine Umgebung  $N_\delta$  von  $(s_0, c_0)$ , so daß gilt: Für  $\mu \in (0, \mu_\delta)$  und  $l \in L_\delta$  existiert genau eine 1-Übergangs–Lösung von (5.27), gegeben durch  $(s, c) \in N_\delta$ . Weiter gibt es eine Konstante  $C = C_\delta > 0$ , sodaß*

$$|(s, c) - (s_0, c_0)|, \varepsilon_a - \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta - \varepsilon_b = \mathcal{O}(e^{-C/\sqrt{\mu}}) \quad \text{für } \mu \rightarrow 0 \quad (5.62)$$

*gleichmäßig in  $l \in L_\delta$ .*

Gemäß Lemma 5.4 ist zum **Beweis von Satz 5.9** die Lösbarkeit der Integralgleichungen (5.25) und (5.26) für  $g$  nahe  $g_M$ , respektive für  $(s, c)$  nahe  $(s_0, c_0)$  zu zeigen. Dies geschieht in [CGS84] durch Einführen einer geeigneten Skalierung und Anwendung des Satzes über implizite Funktionen, wobei sich die Analysis über 17 Seiten erstreckt. Wir skizzieren hier kurz die Beweisidee (in unseren Schreibweisen), wobei wir durchgehend  $(s, c)$  nahe  $(s_0, c_0)$  betrachten.

Wie bereits in Abschnitt 5.2 bemerkt stammen die „Hauptanteile“ von  $I_1(s, c; \theta)$  von den Singularitäten von  $(\Psi(\varepsilon; \theta) - g(\varepsilon))^{-1/2}$  bei  $\varepsilon_a$  und  $\varepsilon_b$ . Bezeichnen wir diese Anteile als  $T_1(s, c)$  und  $T_2(s, c)$ , so können wir suggestiv schreiben

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}} \stackrel{!}{=} I_1(s, c; \theta) \approx T_1(s, c) + T_2(s, c).$$

Da in  $I_2$  die Singularitäten mit  $\varepsilon_a \approx \varepsilon_\alpha$  und  $\varepsilon_b \approx \varepsilon_\beta$  gewichtet werden, erhalten wir entsprechend

$$l\sqrt{\frac{2}{\mu}} \stackrel{!}{=} I_2(s, c; \theta) \approx \varepsilon_\alpha T_1(s, c) + \varepsilon_\beta T_2(s, c),$$

und dieses Gleichungssystem für  $T_1$  und  $T_2$  ergibt

$$T_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\mu} \frac{\varepsilon_\beta - l}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}}, \quad T_2 \approx \sqrt{\frac{2}{\mu} \frac{l - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}}. \quad (5.63)$$

Nun werden die Größen  $h_1 = h_1(s, c)$  und  $h_2 = h_2(s, c)$  betrachtet, die wie folgt gegeben sind, vgl. Abb.5.18: Es seien  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  die links von  $\varepsilon_a(s, c)$  bzw. rechts von  $\varepsilon_b(s, c)$  gelegenen Minima von  $\Psi(\varepsilon; \theta) - s\varepsilon - c$ , dann sei  $h_i = \Psi(\varepsilon_i) - s\varepsilon_i - c$ ,  $i = 1, 2$ .

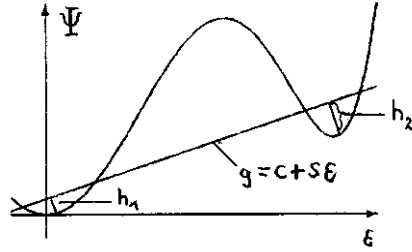


Abbildung 5.18: zu  $h_1$  und  $h_2$ ,

Man beachte  $h_i(s, c) \rightarrow 0$  für  $(s, c) \rightarrow (s_0, c_0)$ , und nach [CGS84], Proposition 4.3, gilt weiter

$$\varepsilon_a - \varepsilon_\alpha = \mathcal{O}(\sqrt{h_1}), \quad \varepsilon_\beta - \varepsilon_b = \mathcal{O}(\sqrt{h_1}),$$

und es folgt ([CGS84], Proposition 5.1)

$$T_i(s, c) \approx -B_i \ln h_i(s, c) \quad (5.64)$$

mit

$$B_1 = (2\sigma_\varepsilon(\varepsilon_\alpha))^{-1/2}, \quad B_2 = (2\sigma_\varepsilon(\varepsilon_\beta))^{-1/2}.$$

Einsetzen von (5.64) in (5.63) liefert

$$h_1(s, c) \approx e^{-\frac{1}{B_1} \frac{\varepsilon_\beta - l}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha} \sqrt{2/\mu}}, \quad h_2(s, c) \approx e^{-\frac{1}{B_2} \frac{l - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha} \sqrt{2/\mu}},$$

was wir zusammenfassend schreiben als

$$h_i \approx e^{-c_i(l)\sqrt{2/\mu}}, \quad (5.65)$$

$$c_1(l) = \frac{1}{B_1} \frac{\varepsilon_\beta - l}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}, \quad c_2(l) = \frac{1}{B_2} \frac{l - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}.$$

Nun werden die entscheidenden Parameter  $k = (k_1, k_2)$  eingeführt, die die „ $\approx$ “ in (5.65) eliminieren, und die implizit definiert sind durch

$$h_i(s, c) = e^{\eta_i k_i} e^{-c_i(l)\sqrt{\mu/2}}, \quad \text{wobei } \eta_i = \frac{1}{B_i(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)}. \quad (5.66)$$

Damit lassen sich die Bedingungen  $I_1(s, c; \theta) = \sqrt{2/\mu}$  und  $I_2(s, c; \theta) = l\sqrt{2/\mu}$  formulieren als eine implizite Gleichung der Form

$$k = G(k, \mu, l)$$

mit differenzierbarem  $G = (G_1, G_2)$  ([CGS84], Proposition 6.1), und eine Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ([CGS84], Proposition 6.2) liefert schließlich den Beweis von Satz 5.9.

In Ergänzung von Satz 5.9 sagt der folgende Satz, daß bei gegebenem  $\mu > 0$  keine 1-Übergangs-Lösung (und d.h. überhaupt keine nichttriviale Lösung von (5.27)) existiert, wenn  $l$  zu dicht bei  $\varepsilon_\alpha$  oder  $\varepsilon_\beta$  liegt. Der anschauliche Grund hierfür ist, daß  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  wegen  $\varepsilon_a \leq l < \varepsilon_b$  in diesem Falle zu nahe bei  $P_M(\theta)$  liegen muß, d.h. es ist  $I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta) > \sqrt{2/\mu}$  für alle  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b) \in \Xi(\theta)$  mit  $\varepsilon_a < l < \varepsilon_b$ .

**Satz 5.10** ([CGS84], Theorem 7.1) *Zu gegebenem  $\mu > 0$  existiert ein  $\delta_\mu > 0$ , so daß (5.27) keine nichttriviale Lösung besitzt für  $l < \varepsilon_\alpha + \delta_\mu$  oder  $l > \varepsilon_\beta - \delta_\mu$ .*

Für das  $\mu_\delta$  aus Satz 5.9 folgt also  $\mu_\delta \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$ , (und es stellt Satz 5.10 eine Verschärfung unseres Korollar 5.5 dar), wichtiger für das weitere ist jedoch die Aussage von Satz 5.9, daß es für ein festes  $l$  aus  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$  stets ein  $\mu_0 > 0$  gibt, sodaß für  $0 < \mu < \mu_0$  die Maxwell-Lösung von (5.27) existiert. Deshalb macht die folgende Aussage Sinn, deren Beweis auf (5.62) und der Transformation (5.59) beruht. Es sei dabei

$$S := 2 \int_{\varepsilon_\alpha}^{\varepsilon_\beta} \sqrt{\Psi(\varepsilon; \theta) - g_M(\varepsilon)} d\varepsilon.$$

**Satz 5.11** ([CGS84], Theorem 8.1) *Für die freie Energie  $E^{(f)}(\varepsilon_{M,\mu}, 0; \theta)$  von  $\varepsilon_{M,\mu}$  gilt*

$$E^{(f)}(\varepsilon_{M,\mu}, 0; \theta) = s_0 l + c_0 + \sqrt{\frac{\mu}{2}} S + \mathcal{O}(e^{-C/\sqrt{\mu}}) \quad \text{für } \mu \rightarrow 0, \quad (5.67)$$

*gleichmäßig in  $l$  aus einem beliebigen abgeschlossen Intervall  $[\varepsilon_\alpha + \delta, \varepsilon_\beta - \delta] \subset (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$ .*

Es setzt sich also die freie Energie von  $\varepsilon_{M,\mu}$  bis auf dem  $\mathcal{O}(e^{-C/\sqrt{\mu}})$ -Term aus dem „rein elastischen Anteil“  $c_0 + s_0 l$ , d.h. dem Minimum der freien Energie im Fall  $\mu = 0$ , vgl. (5.56), und dem als die Grenzflächenenergie in einem Stab unendlicher Länge mit  $\varepsilon \searrow \varepsilon_\alpha$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $\varepsilon \nearrow \varepsilon_\beta$  für  $x \rightarrow \infty$  bekannten Term  $\sqrt{\mu/2} S$  zusammen. Man beachte, daß letzterer unabhängig von  $l$  ist.

Auf (5.67) (und auf der gesamten zuvor in [CGS84] durchgeführten Analysis) beruht nun der folgende Satz.

**Satz 5.12** ([CGS84], Proposition 8.1) *Für  $l$  aus einer abgeschlossenen Teilmenge von  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$  und  $\mu$  hinreichend klein besitzt die Maxwell-Lösung  $\varepsilon_{M,\mu}$  eine geringere freie Energie als*

(i) *jede andere 1-Übergangs Lösung von (5.27),*

(ii) *die zu  $l$  gehörige konstante Lösung  $\varepsilon \equiv l$ .*

Daß schließlich  $\varepsilon_{M,\mu}$  die freie Energie unter allen Lösungen von (5.27) und damit über ganz  $H_1^1$  minimiert, vgl. Bemerkung 5.10 folgt aus folgendem Satz, der besagt, daß  $n$ -Übergangs-Lösungen mit  $n \geq 2$ , die als Lösungen von (5.27) lokale Extrema von  $(P_{s,\mu})$  darstellen, keine lokalen Minima von  $(P_{s,\mu})$  sind.

**Satz 5.13** ([CGS84], Theorem 8.2) *Nichtmonotone  $\varepsilon$  sind keine lokalen Minima der freien Energie.*

**Beweis.** Es sei  $\hat{\varepsilon}$  eine  $n$ -Übergangs-Lösung mit  $n \geq 2$ . Wie in [CGS84] zeigen wir, daß die zweite Variation von  $E^{(f)}$  an der Stelle  $\hat{\varepsilon}$  in Richtung eines  $\varepsilon \in H^1(0,1)$  mit  $\int_0^1 \varepsilon dx = 0$  negativ ist, also

$$\frac{d^2}{d\eta^2} E^{(f)}(\hat{\varepsilon} + \eta\varepsilon; \theta)|_{\eta=0} < 0.$$

Da  $n \geq 2$  existiert ein  $x_1 = 1/n \in (0, 1/2]$  (gegeben durch  $\sqrt{\mu/2}I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b; \theta)$ ) mit  $\hat{\varepsilon}'(x_1) = 0$  und  $\hat{\varepsilon}(x_1 - x) = \hat{\varepsilon}(x_1 + x)$  für  $x \in [0, x_1]$ . Sei nun

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \hat{\varepsilon}'(x) & 0 \leq x \leq 2x_1 \\ 0 & 2x_1 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

sodaß  $\int_0^1 \varepsilon_1 dx = \int_0^{2x_1} \hat{\varepsilon}' dx = \hat{\varepsilon}(2x_1) - \hat{\varepsilon}(0) = 0$ . Weiter sei  $\varepsilon_2 \in H^1(0,1)$  mit

$$\varepsilon_2(0) = 1, \quad \varepsilon_2(x) = 0 \quad \text{für } 2x_1 \leq x \leq 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \varepsilon_2 dx = 0,$$

und sei schließlich  $\varepsilon(\cdot) = \varepsilon_1(\cdot) + \zeta\varepsilon_2(\cdot)$ . Damit gilt  $\varepsilon \in H^1(0,1)$  und  $\int_0^1 \varepsilon dx = 0$  für alle  $\zeta$ , und weiter

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\eta^2} E^{(f)}(\hat{\varepsilon} + \eta\varepsilon; \theta)|_{\eta=0} &= \int_0^1 \sigma_\varepsilon(\hat{\varepsilon}; \theta) \varepsilon^2 + \mu \varepsilon'^2 dx \\ &= \int_0^{2x_1} \sigma_\varepsilon(\hat{\varepsilon}; \theta) (\hat{\varepsilon}' + \zeta\varepsilon_2)^2 + \mu (\hat{\varepsilon}'' + \zeta\varepsilon_2')^2 dx \\ &= \underbrace{\int_0^{2x_1} \sigma_\varepsilon(\hat{\varepsilon}; \theta) \hat{\varepsilon}'^2 + \mu \hat{\varepsilon}''^2 dx}_{\textcircled{1}} \\ &\quad + \underbrace{2\zeta \int_0^{2x_1} \sigma_\varepsilon(\hat{\varepsilon}; \theta) \hat{\varepsilon}' \varepsilon_2 + \mu \hat{\varepsilon}'' \varepsilon_2' dx + \mathcal{O}(\zeta^2)}_{\textcircled{2}} \end{aligned}$$

Da nun  $\hat{\varepsilon}$  eine Lösung von (5.27) ist, gilt  $\sigma_\varepsilon(\hat{\varepsilon}; \theta) \hat{\varepsilon}' = \mu \hat{\varepsilon}''$ , und es folgt

$$\textcircled{1} = \int_0^{2x_1} \mu \hat{\varepsilon}''' \hat{\varepsilon}' + \mu \hat{\varepsilon}'' dx = \mu \int_0^{2x_1} [\hat{\varepsilon}'' \hat{\varepsilon}']_x dx = [\hat{\varepsilon}'' \hat{\varepsilon}']_0^{2x_1} = 0,$$

sowie

$$\textcircled{2} = 2\zeta\mu \int_0^{2x_1} [\hat{\varepsilon}'' \varepsilon_2]_x dx = 2\zeta\mu (\hat{\varepsilon}''(2x_1) \underbrace{\varepsilon_2(2x_1)}_{=0} - \hat{\varepsilon}''(0) \underbrace{\varepsilon_2(0)}_{=1}) = -2\zeta\mu \hat{\varepsilon}''(0).$$

Wir erhalten also

$$\frac{d^2}{d\eta^2} E^{(f)}(\hat{\varepsilon} + \eta\varepsilon; \theta)|_{\eta=0} = -2\zeta\mu\hat{\varepsilon}''(0) + \mathcal{O}(\zeta^2),$$

und da  $\hat{\varepsilon}$  nicht konstant ist, gilt  $\hat{\varepsilon}''(0) \neq 0$ , und damit folgt für  $\zeta$  hinreichend klein die Behauptung.  $\square$

Im nächsten Abschnitt können wir nun aufbauend auf Abschnitt 3.3 ein verfeinertes Bild der Asymptotik im isothermen viskosen Fall mit Grenzflächenenergie geben.

## 5.6 Isothermer viskoser Fall mit Grenzflächenenergie II

**Korollar 5.14** *Es sei  $u_{M,\mu}$  die zur Maxwell-Lösung  $\varepsilon_{M,\mu}$  gehörende Verschiebung,  $u_{M,\mu}(x) = \int_0^x \varepsilon_{M,\mu}(\xi) d\xi$ . Dann ist  $u_{M,\mu}$  asymptotisch stabil bezüglich der Dynamik von (3.33) in  $H^2(0,1) \times L^2(0,1)$ .*

**Beweis.** Aus der nach Satz 5.9 gegebenen Eindeutigkeit von  $\varepsilon_{M,\mu}$  bezüglich  $(s, c) \in N_\delta(s_0, c_0)$  folgt, daß diese in  $H_l^1$  von den weiteren Lösungen von (5.27) isoliert liegt und damit  $u_{M,\mu}$  vom Rest von  $G(\theta, l)$  in  $H^2(0,1)$ . Ferner können Lösungen, die in einer hinreichend kleinen  $H^2(0,1)$ -Umgebung von  $u_{M,\mu}$  und mit hinreichend kleiner kinetischer Energie starten, diese Umgebung nicht verlassen, ohne im Widerspruch zu (3.38) ihre Freie Energie zu erhöhen. Die behauptete Konvergenz von  $u(t)$  gegen  $u_{M,\mu}$  folgt dann mit (3.43).  $\square$

Auf der anderen Seite erhalten wir unmittelbar aus Satz 5.13 und nach Liapunov folgendes Korollar zur Instabilität von  $n$ -Übergangs-Lösungen mit  $n \geq 2$ .

**Korollar 5.15** *Es sei  $\hat{\varepsilon}$  eine  $n$ -Übergangs-Lösung mit  $n \geq 2$  und  $\hat{u}$  die zugehörige Verschiebung. Dann ist  $\hat{u}$  instabil bezüglich der Dynamik von (3.33).*

Ungeklärt blieb in Abschnitt 5.5 wie in [CGS84] die Frage, ob (und für welche  $l$ )

- Ⓐ eine konstante Lösung  $\varepsilon \equiv l$  bzw. Ⓑ eine 1-Übergangs-Lösung  $\varepsilon \neq \varepsilon_{M,\mu}$

ein lokales Minimum der freien Energie sein kann. Bezüglich den konstanten Lösungen erhalten wir dazu eine einfache Antwort aus Unterabschnitt 4.4.1.

**Korollar 5.16** *Für  $l \in \mathcal{S}(\theta)$  ist  $\varepsilon \equiv l$  ein lokales Minimum von  $E^{(f)}$  über  $H_l^1$ .*

**Beweis.** Angenommen  $\varepsilon \equiv l$  ist kein lokales Minimum von  $E^{(f)}$ , dann ist  $\varepsilon \equiv l$  instabil. Nach Satz 4.6 ist  $\varepsilon \equiv l$  aber exponentiell stabil für  $l \in \mathcal{S}(\theta)$ , Widerspruch.  $\square$

Offen bleibt damit insbesondere obige Frage Ⓑ, und damit, ob  $u_{M,\mu}$  und  $u = xl$  die einzigen möglichen stabilen stationären Lösungen sind. Falls ja, stellt sich z.B. die weitergehende Frage nach den jeweiligen stabilen Mengen: man beachte, daß sich Existenz der Maxwell-Lösung und exponentielle Stabilität von  $u = xl$  keineswegs gegenseitig ausschließen, was wir mit Abb.5.19 verdeutlichen. Es sind (für als Beispiel  $\theta > \theta_A$ ) die  $l$ -Intervalle fett gezeichnet, in denen gleichzeitig die Maxwell-Lösung existiert und  $u = xl$  exponentiell stabil ist.

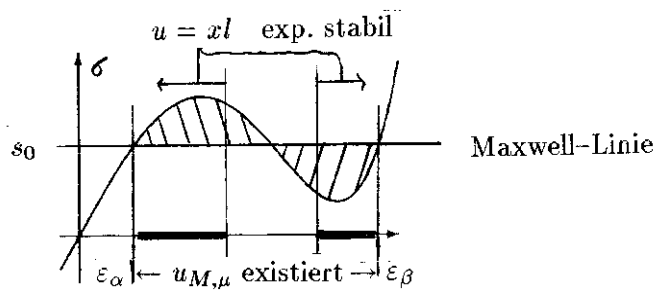


Abbildung 5.19: gleichzeitige Existenz von  $u_{M,\mu}$  und exp. Stabilität von  $u = xl$ .

In jedem Fall können wir für den isothermen Fall das Fazit ziehen, daß das System (3.33) zwar bei geeignetem  $l$  das Ausbilden verschiedener Phasen modelliert, jedoch nicht das Entstehen von Mikrostrukturen, da Lösungen mit mehr als einer Grenzfläche stets instabil sind.



## 6 Maximierung der Entropie unter Erhaltung der inneren Energie

Ausgehend von der Clausius–Duhem–Ungleichung für die Entropie betrachten wir in Abschnitt 6.1 zunächst die Konvergenz von Lösungen von  $(P_\gamma)$  im Falle  $\dot{l} \equiv 0$ . Hierzu betrachten wir (gerechtfertigt durch Satz 3.4 und die anschließende globale Existenz) die Lösungen von  $(P_\gamma)$  als dynamisches System auf  $\mathcal{C} := H_D^4(0, 1) \times H_D^2(0, 1) \times H_N^2(0, 1)$ , jedoch ausgestattet mit der  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^1(0, 1)$ –Normtopologie, auf die sich im weiteren alle topologischen Begriffe beziehen. Auf diesem dynamischen System betrachten wir die Liapunov Funktion  $L = \text{innere Energie} - \text{Entropie}$  und zeigen, daß  $(\mathcal{C}, L)$  ein Gradient–System im Sinne von [Hal88] ist (Satz 6.1). Dies stellt für  $(P_\gamma)$  eine Zusammenfassung der zum isothermen Fall analogen Analysis dar, welche wir in Abschnitt 3.3 schrittweise ausgeführt haben<sup>1</sup>. Damit erhalten wir für beliebige Anfangsbedingungen die Konvergenz der Lösungen gegen die Menge der stationären Lösungen unter der Nebenbedingung der Erhaltung der inneren Energie (Korollar 6.2), und schließlich stabile stationäre Lösungen als Maxima der Entropie unter eben dieser Nebenbedingung. Auf dieses Variationsproblem werfen wir dann in Abschnitt 6.2 unter Verwendung der Methodik aus Abschnitt 5.2 einen ersten numerischen Blick für den Spezialfall  $l = 0$ .

Für das nichtviskose Problem  $(P_0)$  ist  $L$  wegen der thermischen Dissipation ebenfalls eine Liapunov–Funktion, und wir können obiges Variationsproblem identisch für  $(P_0)$  formulieren und behandeln. Als einzigen in diesem Kapitel wichtigen Unterschied zwischen  $(P_0)$  und  $(P_\gamma)$  können wir für  $(P_0)$  jedoch nicht die Relativkompaktheit von Orbits (in  $\mathcal{C}$ ) beweisen, siehe Bemerkung 6.1, und damit auch nicht die Konvergenz von Lösungen gegen die Menge der stationären Lösungen. Deshalb gelten die Aussagen in diesem Kapitel zunächst nur für das Problem  $(P_\gamma)$ , wobei wir jedoch vermuten, daß sie auch auf  $(P_0)$  übertragbar sind.

### 6.1 Konvergenz für das Problem $(P_\gamma)$

Mit  $\Upsilon$  definiert nach (2.25) gilt  $\dot{\Upsilon} \geq 0$  entlang von Lösungen zu  $(P)$  nach (2.26). Wir verwenden nun jedoch nicht unmittelbar  $-\Upsilon$  als Liapunov–Funktion  $L$ , sondern arbeiten die Erhaltung der inneren Energie in die Definition von  $L$  ein, d.h. wir setzen

$$\begin{aligned} L(u_x, u_t, \theta) &:= \int_0^1 \frac{1}{2} u_t^2 + \Psi(u_x, \theta) + \frac{\mu}{2} u_{xx}^2 + (1 - \theta) \Psi_\theta(u_x, \theta) dx \\ &= E^{(i)}(u_x, u_t, \theta) - \Upsilon(u, \theta), \end{aligned} \quad (6.1)$$

und erhalten aus (2.24) und (2.26)

$$\dot{L} = -\dot{\Upsilon} = -\kappa \int_0^1 \left(\frac{\theta_x}{\theta}\right)^2 dx - \gamma \int_0^1 \frac{1}{\theta} u_{tx}^2 dx \geq 0. \quad (6.2)$$

Ferner ist  $L$  offensichtlich stetig auf  $\mathcal{C}$ , und wir erhalten insgesamt folgenden Satz:

<sup>1</sup>Insbesondere bilden auch die Lösungen zu (3.33) zusammen mit der Liapunov–Funktion  $E^{(f)}$  in Abschnitt 3.3 ein Gradient–System im Phasenraum  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

**Satz 6.1** Die Lösungen von  $(P_\gamma)$  bilden ein Gradient-System auf  $\mathcal{C}$  im Sinne von [Hal88], Definition 3.8.1, d.h.

(i) Zu beliebigen Anfangsbedingungen  $(u_0, u_1, \theta_0) \in H_D^4(0, 1) \times H_D^2(0, 1) \times H_N^2(0, 1)$  ist der Orbit  $\cup_{t>0}(u(t), u_t(t), \theta(t))$  relativkompakt in  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^1(0, 1)$ ,

und die Liapunov-Funktion  $L$  erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(ii)  $L(u_x, u_t, \theta) \rightarrow \infty$  für  $\|\theta\|_\infty \rightarrow 0$  oder  $\|\theta\|_\infty \rightarrow \infty$  oder  $\|u_x\|_{H^1} + \|u_t\|_{L^2} \rightarrow \infty$ ,

(iii)  $L$  ist nach unten beschränkt,

(iv) aus  $\dot{L}(u(t), u_t(t), \theta(t)) = 0$  für alle  $t \geq t_0$  folgt, daß  $(u(t_0), \theta(t_0))$  eine stationäre Lösung ist, also  $u_t(t) \equiv 0$ ,  $\theta(t) \equiv \bar{\theta}$  für alle  $t \geq t_0$ .

**Beweis.** Nach (3.32) sind Orbits zunächst global beschränkt in  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^1(0, 1)$ , jedoch folgt in [HZ92], Schritt 4 unabhängig von  $t > 0$  die zusätzliche Abschätzung  $\|\theta(t)\|_{L^\infty} < C$ . Durch Anwendung von z.B. Theorem 4.1 in [Paz75] folgt nun, daß Orbits relativkompakt sind in  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , und wegen  $L^2(0, 1) \hookrightarrow L^1(0, 1)$  folgt (i). Der Punkt dabei ist wieder der, daß der Linearteil  $A$  von  $(P_\gamma)$  im transformierten System (3.4) sektoriell, und damit  $-A$  Generator einer analytischen und kompakten  $C_0$ -Halbgruppe ist, d.h. für alle  $t > 0$  ist<sup>2</sup>

$$e^{-At} = \hat{M} \cdot \text{diag}(1, e^{-\lambda_1^{(1)}t}, e^{-\lambda_1^{(2)}t}, e^{-\lambda_1^{(3)}t}, e^{-\lambda_2^{(1)}t}, \dots) \cdot \hat{M}^H$$

wegen  $e^{-\lambda_k^{(j)}t} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  kompakt als Operator

$$e^{-At} : H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \rightarrow H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

nach Lemma A.5. Als nächstes zeigen wir (ii), wobei wir uns der Einfachheit halber auf das konkrete  $\Psi_0(\theta) = c_v\theta(C_1 - \ln \theta) - C_2$  einschränken. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi(u_x, \theta) + (1 - \theta)\Psi_\theta(u_x, \theta) &= \Psi_0(\theta) + \theta\Psi_1(u_x) + \Psi_2(u_x) + (1 - \theta)(\Psi_0'(\theta) + \Psi_1(\theta)) \\ &= c_v\theta(C_1 - \ln \theta) + C_2 + (1 - \theta)c_v\theta(C_1 - \ln \theta - 1) \\ &\quad + \Psi_2(u_x) + \Psi_1(u_x) + c_v(C_1 - 1) \\ &= c_v \underbrace{(\theta - \ln \theta)}_{\rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0, \theta \rightarrow \infty} + \underbrace{\Psi_2(u_x)}_{\rightarrow \infty, |u_x| \rightarrow \infty} + \underbrace{\Psi_1(u_x)}_{\geq 0} + C. \end{aligned}$$

Bei Hinzunahme der Terme  $\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{\mu}{2}u_{xx}^2$  folgt (ii), und mit analoger Rechnung beweist man (iii). Man beachte, daß (ii) und (iii) nicht erfüllt ist mit  $-\Upsilon$  als Liapunov-Funktion: zum einen ist  $-\Upsilon$  unabhängig von  $u_t$  und  $u_{xx}$ , und zum zweiten gilt  $\Psi_\theta(\theta, u_x) = c_v(C_1 - \ln \theta - 1) + \Psi_1(u_x) \rightarrow -\infty$  für  $\theta \rightarrow \infty$ . Bezüglich (iv) erhalten wir schließlich

$$\dot{L} = -\kappa \int_0^1 \left(\frac{\theta_x}{\theta}\right)^2 dx - \gamma \int_0^1 \frac{1}{\theta} u_{tx}^2 dx = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_x, u_{tx} \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0,$$

also ist  $\theta(t, x) =: m(t)$  unabhängig von  $x$ , und mit  $c_v m_t \equiv m\sigma_\theta(u_x, m)u_{xt} + \gamma u_{xt}^2 \equiv 0$  folgt (iv).  $\square$

<sup>2</sup>mit  $\hat{M}$  analog zu Abschnitt 3.1.1

**Bemerkung 6.1** Es sind (ii),(iii) und auch (iv) ebenfalls erfüllt im nichtviskosen Fall, (ii) und (iii) trivialerweise, und bzgl. (iv) erhalten wir

$$\dot{L} = -\kappa \int_0^1 \left( \frac{\theta_x}{\theta} \right)^2 dx \quad \forall t \geq t_0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta(t, x) = m(t) \text{ unabhängig von } x,$$

und wir müssen zeigen, daß aus der Gleichung

$$c_v m_t \equiv m \sigma_\theta(u_x, m) u_{xt}$$

mit von  $x$  unabhängiger linker und deshalb auch rechter Seite folgt, daß  $m_t(t) \equiv 0$  und  $u_t \equiv 0$ . Wegen der Nebenbedingung

$$\int_0^1 u_{xt}(t, x) dx = \dot{l}(1) = 0$$

existiert nun jedoch für alle  $t$  ein  $\xi \in (0, 1)$  mit  $u_{tx}(\xi) = 0$ . Damit folgt

$$m_t(t) \equiv 0 \text{ für } t \geq t_0, \text{ d.h. } m \equiv: \theta_c \text{ für ein } \theta_c > 0,$$

und weiter

$$0 \equiv \underbrace{\theta_c \sigma_\theta(u_x, \theta_c)}_{\geq 0} u_{tx}.$$

Angenommen nun es gilt oBdA  $u_{tx}(t^*, \xi) > 0$  für ein  $t^* > t_0$  und ein  $\xi \in [0, 1]$ , dann existiert ein  $\delta > 0$ , sodaß  $u_{tx}(t, x) > 0 \quad \forall (t, x) \in (t^* - \delta, t^* + \delta) \times ((\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [0, 1])$ . Wegen  $\sigma_\theta(u_x, \theta) = 0 \Leftrightarrow u_x = 0$  folgt  $u_x \equiv 0$  auf  $(t^* - \delta, t^* + \delta) \times ((\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [0, 1])$ , Widerspruch.

Was wir für  $(P_0)$  nicht zeigen können ist die Relativkompaktheit von Orbits. Die für  $(P_\gamma)$  verwendete Methode scheitert dabei daran, daß der Linearteil von  $(P_0)$  nicht sektoriell ist, und ebenfalls scheiterten Versuche, die Relativkompaktheit von Orbits für  $(P_0)$  auf anderem Wege beweisen. Insbesondere können wir nicht zeigen, daß Orbits stets unabhängig von  $t$  beschränkt sind in einem in  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^1(0, 1)$  kompakt eingebetteten Raum wie z.B.  $H^3(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$ , siehe auch die a-priori Abschätzungen in [Zhe95], Kapitel 4.2.  $\square$

Mit Satz 6.1 können wir nun die Asymptotik von Lösungen von  $(P_\gamma)$  mittels der abstrakten Theorie aus [Hal88] weiterbehandeln. Hier betrachten wir nur den ersten Schritt, d.h durch Anwendung von [Hal88], Lemma 3.8.2 erhalten wir folgendes Korollar aus Satz 6.1.

**Korollar 6.2** Für alle  $(u_0, u_1, \theta_0) \in H_D^4(0, 1) \times H_D^2(0, 1) \times H_N^2(0, 1)$  besteht die Omega-Limes Menge  $\omega((u_0, u_1, \theta_0))$  (definiert bzgl.  $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^1(0, 1)$ -Konvergenz) aus stationären Lösungen, d.h.  $\|u_t\|_{L^2} \rightarrow 0$ , und  $(u, \theta)$  konvergieren in  $H^2(0, 1) \times L^1(0, 1)$  gegen die Menge der stationären Lösungen  $\bigcup_{\theta > 0} G(\theta, l) \times \mathbb{R}_+$ . Sei weiter  $E_0 := E^{(i)}(\partial_x u_0, u_1, \theta_0)$ , dann konvergieren genauer die Lösungen wegen der Erhaltung der inneren Energie gegen die Menge

$$\mathcal{G}(E_0, l) := \mathcal{G}_{nt}(E_0, l) \cup \mathcal{G}_{tr}(E_0, l), \text{ wobei}$$

$$\mathcal{G}_{tr}(E_0, l) := \{(u, \theta) \in \{u = xl, \theta > 0\} : E^{(i)}(l, 0, \theta) = E_0\},$$

$$\mathcal{G}_{nt}(E_0, l) := \{(u, \theta) \in \bigcup_{\theta > 0} G_{nt}(\theta, l) \times \mathbb{R}_+ : E^{(i)}(u_x(\cdot), 0, \theta) = E_0\}.$$

Zu untersuchen bleibt wiederum, ob  $\mathcal{G}(E_0, l)$  eine diskrete Teilmenge von  $H^2(0, 1) \times \mathbb{R}$  ist. Dabei beachte man, daß auch zur Berechnung der Entropie einer stationären Lösung die Größen  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta)$  und  $n$  ausreichen, denn analog zu (5.59) gilt

$$\begin{aligned} \Upsilon(\varepsilon(\cdot), \theta) &= \int_0^1 -\Psi_\theta(\varepsilon, \theta) dx = -\Psi'_0(\theta) - \int_0^1 \Psi_1(\varepsilon) dx \\ &= -\Psi'_0(\theta) - n \int_0^{x_1} \Psi(\varepsilon) \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'} dx \\ &= -\Psi'_0(\theta) - n \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} \frac{\Psi(\varepsilon)}{\sqrt{\Psi(\varepsilon, \theta) - g(\varepsilon)}} d\varepsilon =: I_4(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Damit ist wiederum  $E^{(i)}(\varepsilon, 0, \theta)$  für  $\theta$  konstant gegeben durch

$$\begin{aligned} E^{(i)}(\varepsilon, 0, \theta) &= E^{(f)}(\varepsilon, 0, \theta) + \theta \Upsilon(\varepsilon, \theta) = I_3(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta) + \theta I_4(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta) \\ &=: I_5(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Betrachten wir nun die beiden reellen Funktionen  $I_1$  und  $I_2$  über dem dreidimensionalen Definitionsbereich

$$(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta) \in \mathcal{Z} := \bigcup_{\theta > 0} \Xi(\theta) \times \mathbb{R}_+,$$

( $\mathcal{Z}$  wie zulässig), so können wir mit

$$n_{\max} = n_{\max}(\mu) := \max\{n_{\max}(\theta, \mu) : \theta > 0\} < \infty$$

$\mathcal{G}_{\text{nt}}(E_0; l)$  charakterisieren als endliche Vereinigung

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{nt}}(E_0; l) &= \bigcup_{n=1}^{n_{\max}} (M_1^n \cap M_2^n \cap M_3^n), \quad \text{wobei} \\ M_1^n &:= \{(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta) \in \mathcal{Z} : I_1(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta) = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\mu}}\}, \\ M_2^n &:= \{(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta) \in \mathcal{Z} : I_2(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta) = \frac{l}{n} \sqrt{\frac{2}{\mu}}\}, \\ M_3^n &:= \{(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta) \in M_1^n \cap M_2^n : I_5(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta) = E_0\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dabei ist aus Abschnitt 5.2 anschaulich klar, daß für  $n = 1, \dots, n_{\max}$  die Mengen  $M_1^n$  und  $M_2^n$  zweidimensionale Mannigfaltigkeiten sind, aus deren Schnitt man jeweils Kurven im  $\mathbb{R}^3$  erhält, und als nächstes ist zu zeigen, daß  $I_5$  nirgendwo entlang einer dieser Kurven identisch  $E_0$  ist. Unter den entsprechenden Glattheitsvoraussetzungen erhalten wir also insgesamt eine zu Abschnitt 5.2 analoge Situation, und können vermutlich wie in Bemerkung 5.5 vorgeschlagen vorgehen, um die Isoliertheit der Elemente von  $\mathcal{G}(E_0, l)$  zu beweisen. Dies bleibt analytisch zu untersuchen.

Für das Kontinuum  $\{u = xl, \theta > 0\}$  der trivialen stationären Lösungen gibt es jedoch trivialerweise stets genau ein  $\theta$ , sodaß  $E(\varepsilon, 0, \theta) = E_0$ , denn für alle  $(\varepsilon, \theta)$  in  $H^1(0, 1) \times \mathbb{R}_+$  gilt

$$D_\theta E(\varepsilon, 0, \theta) = -\theta \int_0^1 \Psi_{\theta\theta}(\varepsilon(\cdot), \theta) dx > 0,$$

vgl. (4.49). Es ist  $\mathcal{G}_{\text{tr}}(E_0, l)$  also einelementig, und allgemeiner existiert zu jedem  $u \in H^2(0, 1)$  genau eine Lösung  $\theta = \Theta(u_x)$  von  $E(u_x, 0, \theta) = E_0$ .

In jedem Fall haben wir wegen  $L \searrow \min \Leftrightarrow \Upsilon \nearrow \max$  das Variationsproblem der Maximierung der Entropie unter Erhaltung der inneren Energie gefunden, daß wir im folgenden als  $(P_\eta)$  bezeichnen wollen und notieren als

$$\text{Maximiere } \Upsilon(\varepsilon, \theta) \text{ über } Z_l := \{(\varepsilon, \theta) \in H_D^1(0, 1) \times \mathbb{R}_+ : \int_0^1 \varepsilon dx = l, E(\varepsilon, 0, \theta) = E_0\}.$$

Rechnen wir hierfür noch einmal die zugehörige Euler–Lagrange–Gleichung nach, so erhalten wir wieder (5.27), was auch noch einmal zur rückwärtigen Kontrolle der Herleitung dienen mag. Die Lagrange–Funktion lautet

$$\begin{aligned} H(\varepsilon, \theta) &:= \Upsilon(\varepsilon, \theta) + \beta_1[E(\varepsilon, 0, \theta) - E_0] + \beta_2[\int_0^1 \varepsilon dx - l] \\ &= \int_0^1 -\Psi_\theta dx + \beta_1[\int_0^1 \Psi - \theta\Psi_\theta + \frac{\mu}{2}\varepsilon'^2 dx - E_0] + \beta_2[\int_0^1 \varepsilon dx - l] \end{aligned} \quad (6.6)$$

mit Multiplikatoren  $\beta_1, \beta_2$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} D_\theta H &= \int_0^1 -\Psi_{\theta\theta} dx + \beta_1 \int_0^1 \Psi_\theta - \Psi_\theta - \theta\Psi_{\theta\theta} dx = (1 + \beta_1\theta) \int_0^1 \underbrace{-\Psi_{\theta\theta}}_{>0} dx \\ &\stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \beta_1 = -\frac{1}{\theta} \\ \leadsto D_\varepsilon H &= \int_0^1 -\Psi_{\theta\varepsilon} dx - \frac{1}{\theta} \int_0^1 \Psi_\varepsilon - \theta\Psi_{\varepsilon\theta} - \mu\varepsilon'' dx + \beta_2 \\ &\stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \Psi_\varepsilon - \mu\varepsilon'' - \underbrace{\theta\beta_2}_{=:s} = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

## 6.2 Numerische Experimente zum Problem $(P_\eta)$

Aufbauend auf der in Kapitel 5 hergeleiteten Parametrisierung der stationären Lösungen von (P) durch Tupel  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta)$  soll das Variationsproblem  $(P_\eta)$  für unser Beispiel- $\Psi$  numerisch untersucht werden, wobei wir die Ergebnisse graphisch veranschaulichen. Um die Idee zu verdeutlichen betrachten wir zunächst Abb.6.1. Dort sind in (a) sozusagen als Urbilder die als Tupel  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta)$  mit  $\varepsilon_a = \varepsilon_b$  parametrisierten trivialen stationären Lösungen skizziert. Dann wird für jedes dieser Tupel (mit trivialer Rechnung) die innere Energie  $E$ , die Dehnung  $l$  und die Entropie  $\Upsilon$  bestimmt, und in den  $E$ – $l$ – $\Upsilon$  Raum in Abb.6.1(b) eingetragen, wodurch wir die skizzierte Entropie–Fläche bekommen. Daß wir dabei stets eine negative innere Energie erhalten, liegt im wesentlichen an der Normierung  $\Psi(0, \theta_M) = \Psi_0(\theta_M) = 0$ .

Man beachte, daß wir uns bei der Parametrisierung in Abb.6.1(a) noch auf kein  $l$  oder  $E_0$  festgelegt haben, außer aus Symmetriegründen auf  $l \geq 0$ . Der Grund ist, daß wir so bei der Suche nach nichttrivialen Lösungen die Bedingung (5.26) zunächst ignorieren können. Die Idee besteht dann darin, für eine möglichst große Auswahl an Temperaturen  $\theta$  und verschiedene  $n \in 1, \dots, n_{\max}(\mu, \theta)$  (5.25) über  $\Xi(\theta)$  zu lösen. Für die jeweiligen Lösungstupel  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta)$  berechnen wir dann  $l = n\sqrt{\mu/2}I_2(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \theta)$ ,

$\Upsilon = I_4(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta)$  und  $E^{(i)} = I_5(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta)$  nach (6.3) bzw. (6.4) und tragen das dadurch gegebene Tupel  $(E, l, \Upsilon)$  wiederum in das  $E$ - $l$ - $\Upsilon$  Koordinatensystem ein. Anschließend erhalten wir dann für jedes  $(E_0, l)$ -Paar eine (senkrechte) Gerade  $h$  durch den  $E$ - $l$ - $\Upsilon$  Raum, auf der die Entropien der stationären Lösungen aus  $\mathcal{G}(E_0, l)$  liegen, und hoffen, ausreichend viele  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, n, \theta)$ -Tupel berechnet zu haben, daß

- (i) das Maximum von  $\Upsilon$  entlang  $h$  tatsächlich ein globales Maximum von  $(P_\eta)$  ist, bzw.
- (ii) wir insgesamt ein klares Bild der stationären Lösungen im  $E$ - $l$ - $\Upsilon$  Raum bekommen.

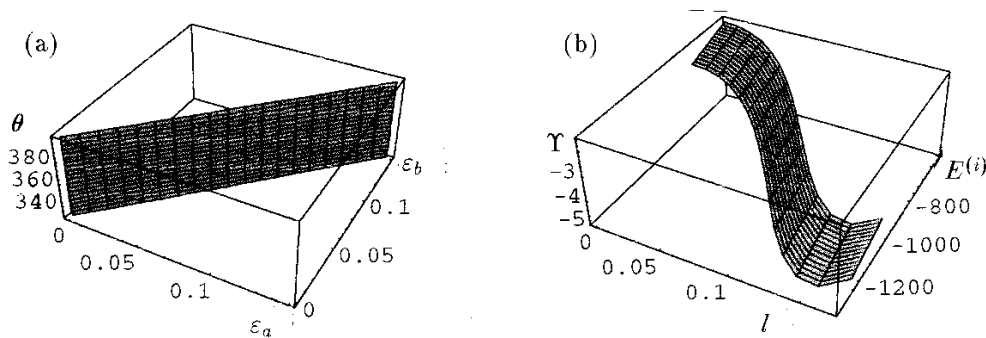


Abbildung 6.1: Die trivialen stationären Lösungen im  $\varepsilon_a$ - $\varepsilon_b$ - $\theta$ - und im  $E^{(i)}$ - $l$ - $\Upsilon$ -Raum.

Dies ist also die grundlegende Idee dieses Abschnitts. Nun tritt jedoch bei der gewissermaßen einfachsten Implementation dieser Aufgabe, etwa durch Überprüfen von (5.25) über  $\Xi(\theta)$  mit einem festen  $\theta$ - $\varepsilon_a$ - $\varepsilon_b$ -Raster, wieder die in Abschnitt 5.2 beschriebene prinzipielle numerische Schwierigkeit auf, daß Lösungen von (5.25) insbesondere für kleine  $\mu$  und kleine  $n$  sehr dicht an  $\partial\Xi(\theta) \setminus \partial_1\Xi(\theta)$  liegen, und dort  $I_1$  (und damit i.a. auch  $I_2$  sowie  $I_4$ ) nicht angemessen integriert werden kann.

Aus diesem Grund schränken wir uns im weiteren auf den Fall  $l = 0$  und damit auf  $\theta < \theta_E$  ein, sowie ferner auf den Fall  $s = 0$  und d.h.  $\varepsilon_a = -\varepsilon_b$  ein. Letzteres stellt eine echte Einschränkung dar, da für  $\theta_M < \theta < \theta_E$  durchaus  $n$ -Übergangs-Lösungen zu  $l = 0$  mit  $s \neq 0$  existieren, siehe z.B. die „parallel“ zu  $\partial_4\Xi(\theta)$  verlaufende Höhenlinie zu  $I_2 = 0$  in Abb.5.9(c2). Für  $\theta < \theta_M$  existieren jedoch keine Lösungen von (5.27) mit  $s = 0$ , siehe [FS90], Lemma 4.4.

Insgesamt werfen also nur einen ersten numerischen Blick auf das Problem  $(P_\eta)$ , der jedoch unseres Erachtens nach für kleine  $\mu$  als stellvertretend für das ganze Problem angesehen werden kann. Konkret vergleichen wir in Abb.6.2 in Abhängigkeit von der inneren Energie die Entropien von 1-, 2000- und 4000-Übergangs-Lösungen. Dabei hat die Gleichung  $I_1(-\varepsilon_b, \varepsilon_b; \theta)$  für  $\theta < \theta_E$  und  $n < n_{\max}|\_{\{\varepsilon_a = -\varepsilon_b\}}$  entweder genau eine Lösung  $\varepsilon_b^{(n,2)}(\theta)$ , oder genau zwei Lösungen  $\varepsilon_b^{(n,1)}(\theta) < \varepsilon_b^{(n,2)}(\theta)$ , vgl. Abb.5.13 für  $\theta = 360$ , und zum Bestimmen der 1-Übergangs-Lösungen haben wir uns zu der Näherung von  $\varepsilon_b^{(1,2)}(\theta)$  durch  $\varepsilon_+(\theta)$  entschieden, sowie von  $\varepsilon_b^{(1,1)}(\theta)$  durch die Abszisse des Schnittpunkts von  $\{\varepsilon_a = -\varepsilon_b\}$  mit  $\partial_4\Xi(\theta)$ . Man beachte, daß diese Randverzerrungen tatsächlich nur im Grenzwert in einem Draht unendlicher Länge angenommen

werden können, da

$$I_1(-\varepsilon_b^{(1,i)}(\theta), \varepsilon_b^{(1,i)}(\theta), \theta) = \infty, \quad i = 1, 2.$$

Damit müssen wir auch die Entropie unserer 1-Übergangs-Lösungen nähern, da mit  $I_1$  auch  $I_4(-\varepsilon_b^{(1,i)}(\theta), \varepsilon_b^{(1,i)}(\theta), 1, \theta)$  divergiert. Da jedoch die Verzerrung im Draht bis auf ein winziges Übergangsgebiet  $\pm\varepsilon_b$  beträgt, betrachten wir  $\Upsilon(\varepsilon, \theta) = -\Psi'_0(\theta) - \varepsilon_b^2$  als hinreichende Näherung für die Entropie der 1-Übergangs-Lösungen, und ebenso die numerische Integration von  $I_3$  als Näherung für deren freie Energie nach (5.67). Die Entropie wie auch die freie Energie der weiteren  $n$ -Übergangs-Lösungen berechnen wir dann nach (5.59) bzw. (6.3) durch numerische Integration von  $I_3$  bzw.  $I_4$ , und schließlich die innere Energie nach (6.4).

Die (etwas komplizierte) Erläuterung der Abbildungen 6.2(a) bis (e) lautet nun wie folgt:

- (a) Dargestellt sind die jeweils zwei Äste von 1- (näherungsweise), 2000- und 4000-Abschnitts-Lösungen, parametrisiert durch die Verzerrung  $\varepsilon_b$  am rechten Rand über der Temperatur.

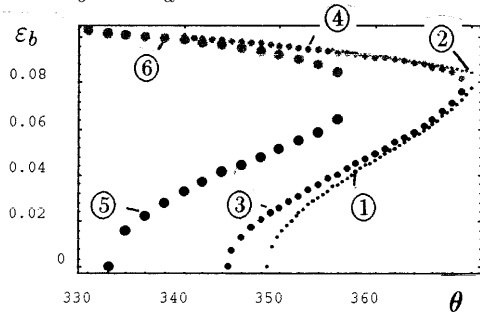
Das zu  $\varepsilon_b^{(1,1)}(\theta)$  gehörende Kontinuum von 1-Übergangs-Lösungen verzweigt bei  $\theta = \theta_M = 348.75$  (näherungsweise, exakt bei  $\theta = \theta_M - \frac{\mu\pi^2}{a_1} \approx \theta_M - 1 \cdot 10^{-6}$ ) aus dem trivialen Lösungsast. Es wurde  $\varepsilon_b^{(1,1)}(\theta)$  berechnet für  $\theta = 348.75, \dots, 370$  und ist in Abb.6.2 als die mit ① bezeichnete Kurve von kleinen dunklen Punkten dargestellt. Die  $\varepsilon_b^{(1,2)}(\theta)$  wurden für  $\theta = 355, 355.5, \dots, 370$  bestimmt und ergeben die Kurve ② von kleinen helleren Punkten. Diese Kurve läßt sich für  $\theta < 355$  fortsetzen, jedoch wurden in Abb.6.2(a) insgesamt nur Lösungen eingetragen, deren innere Energie zwischen  $-1000$  und  $-700$  liegt. Daß wir ferner hier wie im folgenden beim Übergang vom  $\varepsilon_b^{(n,1)}$ - zum  $\varepsilon_b^{(n,2)}$ -Ast eine Lücke lassen, begründet sich daraus, daß die numerische Bestimmung der  $\varepsilon_b$  insbesondere für  $n = 2000$  und  $n = 4000$  an diesen Übergängen unsicher wird.

Der Ast zu  $\varepsilon_b^{(2000,1)}(\theta)$  verzweigt bei  $\theta^{(2000)} = \theta_M - \frac{\mu 2000^2 \pi^2}{a_1} \approx \theta_M - 4.15 = 344.6$ , und ist in Abb.6.2(a) mit ③ bezeichnet (mittelgroße dunkle Punkte). Es wurde  $\varepsilon_b^{(2000,2)}(\theta)$  für  $\theta = 345, 346, \dots, 368$  durch numerische Suche der Nullstellen von  $I_1(-\varepsilon_b, \varepsilon_b, \theta) - \frac{1}{2000} \sqrt{\frac{\mu}{2}}$  bestimmt (Intervallhalbierungsverfahren, aus heuristischen Gründen jeweils mit Startwerten  $\varepsilon_b^- = 0$  und  $\varepsilon_b^+ = 0.08$ ), ebenso wie  $\varepsilon_b^{(2000,2)}$  für  $\theta = 340, 331, \dots, 368$ , bezeichnet mit ④ und dargestellt als mittelgroße helle Punkte. Entsprechend verzweigt der Ast ⑤ zu  $\varepsilon_b^{(4000,1)}(\theta)$  (große dunkle Punkte) bei  $\theta^{(4000)} = \theta_M - \frac{\mu 4000^2 \pi^2}{a_1} \approx \theta_M - 16.6 = 332.16$  und wurde für  $\theta = 334, 338, \dots, 356$  numerisch bestimmt. ⑥ ist schließlich der Ast zu  $\varepsilon_b^{(4000,2)}(\theta)$ ,  $\theta = 330, 332, \dots, 356$  (große helle Punkte).

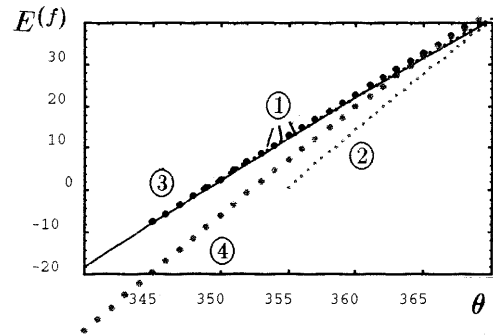
Diese Bezeichnungen für die dreimal zwei Äste behalten wir ebenso wie die entsprechenden Darstellungsweisen in den weiteren Skizzen (b) bis (e) bei.

- (b) Diese Skizze veranschaulicht noch einmal in Ergänzung zu Abschnitt 5.5 die unterschiedlichen freien Energien der trivialen Lösungen, der 1- und der 2000-Übergangs-Lösungen bei fester Temperatur. Die durchgezogene Linie stellt die

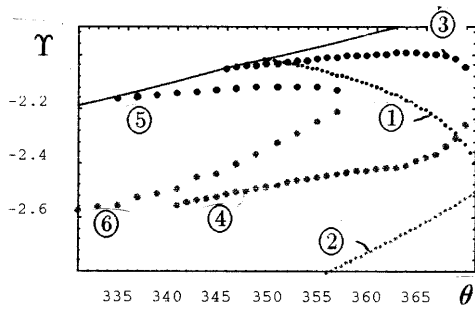
(a) Parametrisierung von 1-,2000- und 4000-Übergangs-Lösungen.  
 $\varepsilon_b = -\varepsilon_a$  über  $\theta$ .



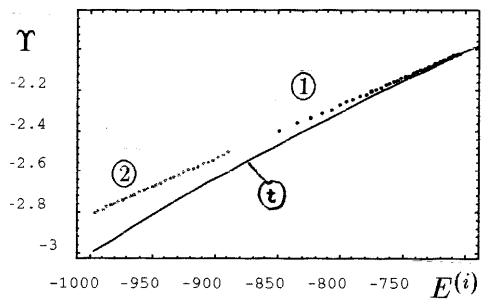
(b) freie Energie über der Temperatur  
 triviale, 1- und 2000-Lösungen.



(c) Entropie über der Temperatur



(d) Bild der 1-Übergangs- und der  
 trivialen Lösungen im  $E$ - $\Gamma$ -Raum



(e) Entropiedifferenz der 1-,2000- und 4000- Lösungen zu den trivialen Lösungen.

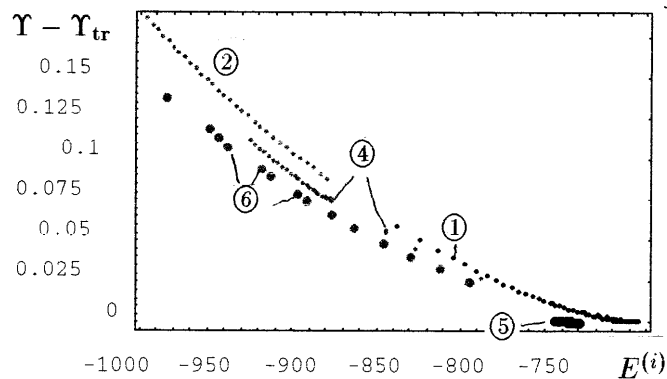


Abbildung 6.2: Berechnung eines Ausschnitts aus dem Entropieraum bei  $l = 0$ .



freie Energie der trivialen Lösungen  $(\varepsilon, \theta)$ ,  $\varepsilon \equiv 0$ ,  $340 \leq \theta \leq 370$  dar, also kurzerhand  $\Psi_0(\theta)$ . Bei  $\theta = \theta_M$  beginnt dann der Ast ①, entlang welchem die 1-Übergangs-Lösungen eine nahezu identische jedoch leicht höhere freie Energie als die trivialen Lösungen besitzen. Bei  $\theta = 370$  schließt sich dann der Ast ② von 1-Übergangs-Lösungen an. Auf diesem liegen die (genäherten) Maxwell-Lösungen aus Abschnitt 5.4 bzw. 5.5, und in Übereinstimmung mit Abschnitt 5.5 haben diese (hier unter den berechneten Lösungen) die niedrigste freie Energie.

Analog zu ① und ② verhalten sich auch die 2000-Ast-Lösungen auf ③ und ④ im  $E^{(f)}$ - $\theta$ -Diagramm (siehe Skizze), und ebenso die Äste ⑤ und ⑥, auf deren Darstellung wir aber der Übersichtlichkeit halber verzichten.

- (c) Hier folgt die Darstellung der Entropien entlang der einzelnen Äste über der Temperatur. Die durchgezogene Linie stellt die Entropien der trivialen Lösungen dar, und natürlich verzweigen auch im  $\Upsilon$ - $\theta$ -Raum die Äste ①, ③, ⑤ bei den jeweiligen Temperaturen aus dem trivialen Lösungsast. Dabei hat bei fester Temperatur  $\theta$  die triviale Lösung  $\varepsilon \equiv 0$  stets maximale Entropie  $\Upsilon(0, \theta) = -\Psi'_0(\theta)$ . Ferner haben die Lösungen aus ①, ③ bzw. ⑤ stets eine höhere Entropie als die aus ②, ④ bzw. ⑥, anschaulich aus dem Grund, daß mit den jeweils kleineren Randverzerrungen  $\varepsilon_b^{(n,1)}$  auch das quadratische Mittel  $\int_0^1 \Psi_1(\varepsilon) dx = \int_0^1 \varepsilon^2 dx$  kleiner wird.

Interessant ist jedoch, daß für  $352 < \theta < 370$  die  $\varepsilon_b^{(1,2000)}$ -Lösungen trotz der größeren Randverzerrungen eine höhere Entropie haben als z.B. die  $\varepsilon_b^{(1,1)}$ -Lösungen. Hier schlägt der (erwartete) Effekt durch, daß auf Grund der vielen Phasenübergänge in der  $\varepsilon^{(1,2000)}$ -Lösung die mittlere Verzerrung wieder kleiner wird als die in der  $\varepsilon_1^{(1,1)}$ -Lösung.

Wir bemerken noch, daß nach unserem Erachten der (mit 2000 bzw. 4000 multiplizierte) Fehler bei der numerischen Integration der Entropie entlang der Äste ④ und ⑥, -bzw. die endliche Genauigkeit bei der Bestimmung der jeweiligen  $\varepsilon_b^{(n,2)}$ , zu dem zwar qualitativ richtigen, jedoch sehr unregelmäßigen Verlauf dieser Äste im  $\Upsilon$ - $\theta$ -Diagramm führt, was erneute numerische Schwierigkeiten deutlich macht.

- (d) Dies ist nun die erste der beiden für das Variationsproblem  $(P_\eta)$  interessanten Skizzen. Dargestellt sind über der zugehörigen inneren Energie die Entropie der durch ① und ② parametrisierten Lösungen, sowie als durchgezogene Linie die Entropie im trivialen Lösungsast, bezeichnet mit  $\textcircled{t}$ . Dabei steigt die Temperatur der trivialen Lösungen entlang  $\textcircled{t}$  von  $\theta = 255$  bei  $E = E_1 := -997$  auf  $\theta = 352$  bei  $E = E_4 := -703$ . Entlang von ② hingegen wächst die Temperatur von 355 bei  $E = E_1$  bis 370 bei  $E_2 \approx -889$ . Die Temperatur der trivialen Lösungen dort ist  $\theta \approx 294$ . Entlang von ① fällt  $\theta$  von 370 bei  $E = E_3 \approx -850$  (zugehörige Temperatur der trivialen Lösung ist  $\theta \approx 304$ ), auf  $\theta_M$  bei  $E = E_4 \approx -703$ , der Stelle, an der ① nun im  $\Upsilon$ - $E^{(i)}$ -Diagramm im trivialen Lösungsast verschwindet. Man beachte also insbesondere, daß bei gleicher innerer Energie eine 1-Übergangs-Lösung aus ② und auch aus ① zu einer deutlich höheren Temperatur gehört, als die triviale Lösung, was sich entsprechend auch in der höheren Entropie der 1-Übergangs-Lösungen wiederfindet. Diese Rechnung stimmt zumindest qualitativ gut mit der physikalischen Beobachtung überein, daß beim Übergang von der Austenitphase zu einer der beiden Martensitphasen Wärme frei wird.

- (e) Schließlich folgen die Entropiedifferenzen der 1-,2000- und 4000-Übergangslösungen zur Entropie der trivialen Lösung mit gleicher innerer Energie. Die Äste von 2000- bzw. 4000-Übergangslösungen liegen wie abgebildet zwischen dem Ast der trivialen Lösungen und den 1-Übergangslösungen, wobei der (in der Abbildung nicht zu erkennende) Ast ③ bei  $E \approx -740$  beginnt, dort dicht unter ① liegt und bei  $E \approx -716$  im trivialen Lösungsast verschwindet.

Abschließend getrauen wir uns nun auf Grund der erhaltenen numerischen Ergebnisse ein Fazit zur Asymptotik von Lösungen zu ( $P_\gamma$ ) im Fall  $l \equiv 0$ . Dabei gehen wir davon aus, daß die Behauptungen auch im nichtviskosen Fall richtig sind, sowie daß im Fall  $\dot{l} \equiv 0$ ,  $l \neq 0$  analoge Aussagen gelten. Man beachte jedoch, daß wir in Abb.6.2 die qualitativ von den betrachteten  $n$ -Übergangslösungen verschiedenen  $n$ -Übergangslösungen mit  $s \neq 0$  nicht berücksichtigt haben. Dennoch wagen wir bei aller Vorsicht folgende Behauptungen:

- (i) Für kleine innere Energien (in Abb. 6.2(c) etwa  $E^{(i)} < -850$ ) konvergieren Lösungen zu ( $P_\gamma$ ) bevorzugt gegen die 1- $M_-$ - $M_+$ -Übergangslösung zur gegebenen inneren Energie, d.h. gegen die Maxwell-Lösung zu der eindeutigen Grenzwerttemperatur.
- (ii) Für mittlere innere Energien (in Abb.6.2(c) etwa  $-800 < E^{(i)} < -700$ ) rücken die Entropien der verschiedenen stationären Lösungen dichter aneinander. Globales Maximum der Entropie ist nun die 1- $M_-$ - $A$ - $M_+$ -Übergangslösung, sodaß Lösungen bevorzugt gegen diese konvergieren sollten.
- (iii) Bei hoher innerer Energie (in Abb.6.2(c)  $E^{(i)} > -700$ ) *müssen* schließlich Lösungen gegen die triviale Lösung  $\varepsilon \equiv 0$  mit der entsprechenden Grenztemperatur konvergieren, da nichttriviale Lösungen mit der gegebenen inneren Energie nicht existieren. Dies stimmt insgesamt mit den Ergebnissen aus Kapitel 4 überein, da genau die Lösungen, die in  $\mathcal{S}$  starten, eine hohe innere Energie besitzen.

Offen bleibt dabei, ob die drei beschriebenen Arten von Lösungen die einzigen möglichen lokalen Maxima der Entropie darstellen. Möglicherweise gilt dabei in Analogie zu Satz 5.13, daß  $n$ -Übergangslösungen mit  $n > 1$ , die als stationäre Lösungen die Euler-Lagrange-Gleichung (6.7) erfüllen und mithin lokale Extrema des Variationsproblems ( $P_\eta$ ) darstellen, keine lokalen Maxima von ( $P_\eta$ ) sind.

- (iv) Unter der Voraussetzung, daß die obigen Behauptungen richtig sind, kommen wir zu dem Schluß, daß die Modelle ( $P_0$ ) und ( $P_\gamma$ ) ähnlich wie im isothermen Fall, siehe Abschnitt 5.6, zwar bei geeigneten Anfangsbedingungen das Entstehen von Phasenübergängen und den damit z.B. verbundenen Hysterese-Effekt, siehe Abschnitt 2.1.2, beschreiben, jedoch nicht die Entwicklung von Mikrostrukturen. Dies stimmt mit den numerischen Ergebnissen zu ( $P_0$ ) aus [Bub95] (etwas andere Temperatur-Randbedingung am rechten Rand, siehe (2.15)) überein, daß dort der Draht auch während des Ziehens (also nicht  $\dot{l} \equiv 0$ ) entweder nahe  $u = xl$  ist, oder Konfigurationen mit genau zwei Phasen bevorzugt. Leider wird in [Bub95] jedoch stets so weit gezogen, daß bei den betrachteten Temperaturen die triviale stationäre Lösung exponentiell stabil ist. Bei den thermisch gesteuerten numerischen Experimenten zu ( $P_0$ ) in [SN91], siehe insbesondere Experiment 2, stellen sich explizit die triviale bzw. die Maxwell-Lösung als stationäre Zustände ein.

# A Anhang

## A.1 Einbettungen, Ungleichungen und Verschiedenes

Wir beginnen mit folgendem Satz, der verschiedene Kompaktheits- und Einbettungssätze für Sobolevräume vereinigt. Diese zitieren wir nach [Tem88], Abschnitt II.1.2 bzw. II.1.3 zur Verallgemeinerung auf Sobolevräume mit nicht ganzzahligen Exponenten, wobei wir uns diese Räume wie in (3.10) unter der impliziten Verwendung der unten folgenden Poincaré-Ungleichungen definiert denken als

$$H^m(0, 1) = \left\{ p = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\pi x) : \|p\|_m^2 := \sum_{k=0}^{\infty} k^{2m} c_k^2 < \infty \right\},$$

wenn wir im zugrundeliegenden Problem Neumann-Randbedingungen betrachten wollen, bzw. mit **cos** durch **sin** ersetzt für Dirichletrandbedingungen. Der Allgemeinheit zuliebe notieren wir den Satz wie in [Tem88] für beliebige allerdings beschränkte offene Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit „hinreichend glattem Rand“, genauer von der Klasse  $C^r$  mit  $r$  stets hinreichend groß.

**Satz A.1** (i) Für  $m \geq 0$ ,  $1/p - m/n > 0$  und  $1/q = 1/p - m/n$  ist  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  und die Einbettung ist stetig mit

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(m, n, p, \Omega) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Ferner ist die Einbettung kompakt für alle  $q^*$  mit  $1 \leq q^* < q$ .

(ii) Für  $1/p - m/n < 0$  sei  $k = \lfloor m - n/p \rfloor$  und  $\alpha = m - n/p - k$  (mit also  $0 \leq \alpha < 1$ ). Dann gilt  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ , wobei der  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  der Raum der Funktionen  $u \in C^k(\bar{\Omega})$  ist, deren Ableitungen der Ordnung  $k$  Hölder-stetig sind zum Exponenten  $\alpha$ , d.h. bei denen (mit  $j$  als Multiindex) gilt

$$höl_{\alpha}(D^j u) := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^j u(x) - D^j u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}^n \quad \text{mit } |j| = k.$$

Dies ist ein Banachraum unter der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|j|=k} höl_{\alpha}(D^j u).$$

Im Spezialfall  $m = 1$  und  $p > n$  ist die Einbettung  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha^*}(\Omega)$  kompakt für alle  $0 \leq \alpha^* < \alpha = 1 - n/p$ .

**Lemma A.2** (i) Es sei  $u \in H_0^1(0, 1)$ , dann gilt

$$\int_0^1 u^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u'^2 dx \tag{A.1}$$

(ii) Für  $u \in H^1(0, 1)$  gilt

$$\int_0^1 u^2 dx \leq \left( \int_0^1 u dx \right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u'^2 dx \tag{A.2}$$

**Beweis.** Im Prinzip sind beide Ungleichungen Standard, allerdings konnten wir für (ii) nirgendwo den in Kapitel 4 dringend benötigten expliziten Vorfaktor  $1/\pi^2$  finden. Wir zeigen (A.2) für

$$u \in M = H_a^2(0, 1) = \{u \in H^2(0, 1) : \int_0^1 u dx = 0\} \subset H^1(0, 1).$$

Für beliebiges  $u \in H^2(0, 1)$  folgt dann (A.2) mit der Zerlegung  $u = u_1 + c$ ,  $u_1 \in M$ ,  $c = \text{const}$  und mit (A.2) für  $u_1$ , und schließlich für beliebiges  $u \in H^1(0, 1)$  mit dem üblichen Dichtheitsargument. Weiter setzen wir voraus  $\int_0^1 u_1^2 dx \neq 0$ , sonst ist alles trivial. Zu zeigen ist

$$\alpha := \min_{u \in M} \int_0^1 u'^2 dx / \int_0^1 u^2 dx \geq \pi^2.$$

Angenommen  $u_0$  sei ein (lokaler) Minimierer und  $u \in M$  beliebig, dann hat

$$F(\eta) := \underbrace{\int_0^1 (u'_0 + \eta u')^2 dx}_{F_1} / \underbrace{\int_0^1 (u_0 + \eta u)^2 dx}_{F_2}$$

ein Minimum bei  $\eta = 0$ , d.h.

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{F_1(0)'F_2(0) - F_1(0)F_2'(0)}{F_2^2(0)} = 0 \\ \Leftrightarrow \left[ \int_0^1 2(u'_0 + \eta u')u' dx \int_0^1 (u_0 + \eta u)^2 dx - \int_0^1 (u_0 + \eta u)^2 dx \int_0^1 2(u_0 + \eta u)u dx \right]_{\eta=0} &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^1 u'_0 u' dx \int_0^1 u_0^2 dx &= \int_0^1 u_0'^2 dx \int_0^1 u_0 u dx \\ \Leftrightarrow \int_0^1 u'_0 u' dx &= \alpha \int_0^1 u_0 u dx \\ \Leftrightarrow [u'_0 u]_0^1 &= \int_0^1 (u_0'' + \lambda u_0) u dx \end{aligned} \tag{A.3}$$

Dies muß für alle  $u \in M$  gelten, und daraus folgt  $u_0'' + \alpha u = \text{const}$ , denn angenommen daß nicht, dann kann man  $u$  ändern in  $M$ , sodaß die linke Seite von (A.3) gleichbleibt, und die rechte Seite sich ändert. Damit folgt  $u_0'(0) = u_0'(1) = 0$ . Weiter folgt

$$\begin{aligned} \text{const} &= \int_0^1 u_0'' + \alpha u dx = \underbrace{\int_0^1 u_0'' dx}_{[u_0']_0^1=0} + \alpha \underbrace{\int_0^1 u_0 dx}_{=0 \text{ (} u_0 \in M)} = 0 \\ \Rightarrow u_0'' + \alpha u &= 0 \Rightarrow u_0(x) = c_1 \sin \sqrt{\alpha} x + c_2 \cos \sqrt{\alpha} x \end{aligned}$$

und mit den Randbedingungen folgt  $u_0(x) = c_2 \cos \sqrt{\alpha} x$  mit  $\sqrt{\alpha} = k\pi$ , d.h.  $\alpha = k^2 \pi^2$ , und unser minimales  $\alpha$  erhalten wir für  $k = 1$ .  $\square$

Ein entscheidendes Hilfsmittel zum Beweis der globalen Existenz von Lösungen wie auch bei der von uns so bezeichneten Energie-Methode in Kapitel 4 ist das sogenannte Gronwallsche Lemma, daß wir hier in folgender Form notieren, vgl. [Tem88], Abschnitt III.1.1.3.

**Lemma A.3 (Gronwallsche Ungleichung)** *Es seien  $y, dy/dt, g$  und  $h$  auf  $[t_0, \infty)$  definiert und auf jeder kompakten Teilmenge von  $[t_0, \infty)$  integrierbar mit*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h$$

für alle  $t \geq t_0$ . Dann gilt

$$y(t) \leq y(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right) + \int_{t_0}^t h(s) \exp\left(\int_s^t g(\tau) d\tau\right) ds \quad \forall t \geq t_0.$$

Grundlegend für die Verwendung der Theorie aus [Hen81] in Kapitel 3 ist, daß der Linearteil der betrachteten Evolutionsgleichung ein sektorieller Operator ist. Hier die entsprechende Definition nach Henry.

**Definition A.4 (sektorieller Operator)** *Ein linearer Operator  $A$  auf einem Banachraum  $X$  heißt sektoriell, wenn  $D(A)$  dicht ist in  $X$ , der Bildbereich abgeschlossen ist, und es ein  $\phi \in (0, \pi/2)$ , ein  $a \in \mathbb{R}$  sowie ein  $M \geq 1$  gibt, sodaß die Resolventenmenge von  $A$  den Sektor*

$$S_{a,\phi} = \{\lambda : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi - \phi, \lambda \neq a\}$$

umfaßt, und folgende Resolventenabschätzung gilt,

$$\|(\lambda Id - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \text{für alle } \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Zur Anschauung eines Sektors siehe Abb.3.1. Man beachte, daß der Öffnungswinkel des Sektors stets größer als  $\pi$  sein muß.

Das folgende Lemma ist im Grunde elementar, nehmen wir hier aber auf, da wir die entsprechende Aussage nicht in der Literatur finden konnten.

**Lemma A.5** *Es sei  $X$  ein Hilbertraum und  $A$  ein linearer Operator  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  mit Spektraldarstellung  $Ax = A \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k x_k$  bzgl. der Orthonormalbasis  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Dann ist  $A$  kompakt, genau dann wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ .*

**Beweis.** Wir betrachten die Folge  $(A_n)$  linearer Operatoren mit

$$A_n : D(A) \rightarrow X, \quad A_n x = \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k x_k.$$

Da  $A_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen endlich dimensionalen Bildbereich hat, ist  $(A_n)_n$  eine Folge kompakter linearer Operatoren. Ferner gilt mit  $(A - A_n)x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k c_k x_k$  daß  $\|A - A_n\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \sup\{|\lambda_{n+k}| : k \in \mathbb{N}\} \rightarrow 0$ . Da der Unterraum der kompakten Operatoren abgeschlossen ist in  $\mathcal{L}(X, X)$ , folgt die Hinrichtung.

Zum Beweis der Rückrichtung betrachten wir die Folge  $(Ax_k)_k = (\lambda_k x_k)_k$  der Bilder der Basisvektoren. Da für alle  $x \in X \equiv X'$  die Folge  $(x, x_k)$  der Fourierkoeffizienten

von  $x$  quadratsummierbar ist, gilt  $(x, x_k)_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , also konvergiert  $(x_k)_k$  schwach in  $X$  gegen 0 und damit  $(\lambda_k x_k)$  stark, also  $\|\lambda_k x_k\|_X = \lambda_k \rightarrow 0$ .  $\square$

Im folgenden Lemma notieren wir eine hinreichende Bedingung dafür, daß das Bild einer Basis unter Multiplikation mit einer unendlichen Folge von Matrizen wieder eine Basis darstellt. Es stammt aus [Han92] und wird bei uns im entsprechenden Abschnitt 4.2.1 benötigt.

**Lemma A.6** ([Han92], Proposition 2.2) *Es sei  $H$  ein Hilbertraum und  $\{E_j^k\}, j = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots$  eine Basis von  $H$ . Ferner sei  $M(k)$  eine Folge von  $n \times n$  Matrizen mit*

$$(i) \inf_{k \in \mathbb{N}} |\det M(k)| > 0 \quad \text{und} \quad (ii) \sup_{k, j, i} |M_{i, j}(k)| < \infty,$$

und es sei

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^k \\ \Phi_2^k \\ \vdots \\ \Phi_n^k \end{pmatrix} = M(k) \begin{pmatrix} E_1^k \\ E_2^k \\ \vdots \\ E_n^k \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\{\Phi_j^k\}, j = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots$  eine Basis von  $H$ .

Schließlich notieren wir noch folgende ebenfalls in Unterabschnitt 4.2.1 verwendete Definition aus der Halbgruppentheorie linearer Operatoren, nebst anschließendem Satz.

**Definition A.7** *Eine Familie  $\{S(t) : 0 \leq t < \infty\}$  beschränkter linearer Operatoren auf einem Banachraum  $X$  heißt stark stetige Halbgruppe, (kurz  $C_0$ -Halbgruppe) :gdw*

$$(i) S(0) = Id, \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$$

$$(ii) t \mapsto S(t)x \text{ ist stetig auf } [0, \infty) \quad \forall x \in X$$

Zu  $\{S(t)\}$  definieren wir einen Operator  $A$  mit

$$D(A) := \{x \in X : Ax := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(S(h)x - x) \text{ existiert in } X\},$$

und nennen  $A$  den infinitesimalen Generator der Halbgruppe  $\{S(t)\}$ . Für  $x(0) = x_0 \in X$  setzen wir  $x(t) = S(t)x_0$ . Es ist  $t \rightarrow x(t)$  stetig differenzierbar für  $x_0 \in D(A)$ , und es gilt ([Paz83] 1.2.4)

$$x(t) = S(t)x_0 \in D(A) \text{ und } \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(S(t)x_0) = AS(t)x_0 = S(t)Ax_0. \quad (\text{A.4})$$

In den Anwendungen sind wir besonders an Halbgruppen von Kontraktionen interessiert. Diese hängen eng mit dissipativen Operatoren auf Hilberträumen zusammen, es gilt das folgende Korollar zum Satz von Lumer-Phillips:

**Satz A.8** ([Paz83], 1.4.4) *Es sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und  $A : D(A) \rightarrow H$  ein abgeschlossener linearer Operator mit  $\overline{D(A)} = H$ . Weiter seien  $A$  und sein adjungierter Operator  $A^*$  dissipativ, dann ist  $A$  infinitesimaler Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $\{S(t)\}$  von Kontraktionen auf  $H$ , d.h. es gilt  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq 1$  für alle  $t \geq 0$ .*

**Bemerkung A.1**  $A$  heißt dissipativ wenn  $\operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0 \quad \forall x \in D(A)$ .

## A.2 Bifurkation aus einfachen Eigenwerten

Wir notieren den in Unterabschnitt 5.1 verwendeten Satz über die Bifurkation aus einfachen Eigenwerten aus [Mie96]. Dabei sei  $X$  ein Banachraum, und wir betrachten Probleme  $F(u, \lambda) = 0$  für  $u \in X$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Weiter sei ein Lösungsast  $\lambda \mapsto u = U(\lambda)$  bekannt, den wir als den trivialen Lösungsast bezeichnen wollen. Zunächst benötigen wir noch die beiden folgenden Definitionen.

**Definition A.9** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  mit Nullraum  $N(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$  und Bildraum  $W(A) = \{Ax : x \in X\}$ . Dann heißt  $A$  Fredholmsch, wenn*

$$\dim N(A) < \infty \quad \text{und} \quad \text{codim } W(A) < \infty,$$

wobei gilt  $n = \text{codim } W(A)$ , falls  $n$  die kleinste natürliche Zahl ist mit  $X = W(A) + \text{span}(x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Für  $A$  Fredholmsch heißt  $\text{ind}_{\text{Fred}} = \dim N(A) - \text{codim } W(A)$  der Fredholm-Index von  $A$ .

**Definition A.10** *Ein Punkt  $(U(\lambda_0), \lambda_0)$  auf dem trivialen Lösungsast heißt Verzweigungspunkt der Gleichung  $F(u, \lambda) = 0$ , falls es Lösungen  $(u_k, \lambda_k)$  gibt, die in  $X \times \mathbb{R}$  gegen  $(U(\lambda_0), \lambda_0)$  konvergieren, jedoch nicht auf dem trivialen Lösungsast liegen.*

**Satz A.11 (Bifurkation aus einfachen Eigenwerten [Mie96], Satz 3.4)** *Es sei  $F \in C^1(X \times \mathbb{R}, X)$  und  $A(\lambda) = D_u F(U(\lambda), \lambda)$  Fredholmsch mit Index Null für  $\lambda = \lambda_0$ , sowie  $N(A(\lambda_0)) = \text{span}\{\phi\}$  und  $\phi \notin W(A(\lambda_0))$ . Dann gilt*

- (i) *Für  $|\lambda - \lambda_0|$  hinreichend klein hat  $A(\lambda)$  einen eindeutigen reellen Eigenwert  $\mu(\lambda)$  mit  $\mu(\lambda_0) = 0$ , und die Abbildung  $\lambda \mapsto \mu(\lambda)$  ist differenzierbar.*
- (ii) *Wechselt  $\mu(\lambda)$  bei  $\lambda_0$  das Vorzeichen, so ist  $(U(\lambda_0), \lambda_0)$  ein Verzweigungspunkt.*
- (iii) *Gilt ferner  $\mu'(\lambda_0) \neq 0$ , so liegen alle abzweigenden Lösungen auf einem ein-dimensionalen Lösungsast*

$$\mathcal{C}_k : (-\delta, \delta) \ni \alpha \mapsto (\alpha\phi_k + h(\alpha), \Lambda(\alpha)),$$

wobei  $h : (-\delta, \delta) \rightarrow X \setminus \text{span}\{\phi\}$  differenzierbar ist mit  $h(0) = h'(0) = 0$ .

# Literaturverzeichnis

- [BHJ<sup>+</sup>91] J. M. Ball, P.J. Holmes, R.D. James, R.L. Pego, and P.J. Swart. On the dynamics of fine structure. *J. Nonlinear Sci.*, 1:17–70, 1991.
- [BMH91] Ursula Brechtken-Manderscheid and Erhard Heil. Convexity and calculus of variations. Preprint TU Darmstadt, 1991.
- [Bub95] Nikolaus Bubner. *Modellierung dehnungsgesteuerter Phasenübergänge in Formgedächtnislegierungen*. -Als Ms. gedr.- Aachen: Shaker, 1995.
- [CGS84] Jack Carr, Morton E. Gurtin, and Marshall Slemrod. Structured phase transitions on a finite interval. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 84:317–351, 1984.
- [CH94] Zhiming Chen and K.H. Hoffmann. On a one-dimensional nonlinear thermoviscoelastic model for structural phase-transitions in shape memory alloys. *J. Diff Eqs.*, 112:325–350, 1994.
- [Fal83] F. Falk. Ginzburg–landau theory of static domain walls in shape memory alloys. *Zeitschrift für Physik B – Condensed Matter*, 51:177–185, 1983.
- [FM96] G. Friesecke and J.B. McLeod. Dynamics as a mechanism preventing the formation of finer and finer microstructure. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 133:199–247, 1996.
- [FS90] A. Friedman and J. Sprekels. Steady states of austenitic-martensitic domains in the ginzburg-landau theory of shape memory alloys. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2:199–213, 1990.
- [GR85] K. Geba and P.M. Rabinowitz. *Topological Methods in Bifurcation Theory. Séminaire Scientifique de Mathématiques Supérieures. Séminaire Scientifique OTAN*. Montreal: Les Presses de l’Université de Montréal, 1985.
- [Hal88] Jack Hale. *Asymptotic behaviour of dissipative systems*. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1988.
- [Han92] Scott W. Hansen. Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod. *J. Math. Anal. Appl.*, 167:429–442, 1992.
- [Hen81] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Springer Lecture Notes in Mathematics 840. Springer, 1981.



- [HM90] K.-H. Hoffmann and M. Niezgodka. Mathematical models of dynamical martensitic transformations in shape memory alloys. Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No.201, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 1990.
- [HZ92] K.H. Hoffmann and A. Zochovski. Existence of solutions to some nonlinear thermoelastic systems with viscosity. *Math. Meth. in Applied Sciences*, 15:187–204, 1992.
- [Mie96] Alexander Mielke. Nichtlineare funktionalanalysis, vorlesung an der universität hannover, ss 1996. 1996.
- [Paz75] Amnon Pazy. A class of semi-linear equations of evolution. *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 20, No.1:23–36, 1975.
- [Paz83] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983.
- [Peg87] R.L. Pego. Phase transitions in one-dimensional nonlinear viskoelasticity: Admissibility and stability. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 97:353–394, 1987.
- [PW67] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Prentice–Hall, 1967.
- [Sch80] L. McDonald Schetky. Legierungen, die sich an formen erinnern. *Spektrum der Wissenschaft*, 1:48–57, 1980.
- [Sch84] Renate Schaaf. Global behaviour of solution branches for some neumann problems depending on one or several parameters. *J. Reine Angew. Math.*, 346:1–31, 1984.
- [Sle81] Marshall Slemrod. Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional non-linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 76:97–133, 1981.
- [SN91] Jürgen Sprekels and Marek Niezgodka. Convergent numerical approximations of the thermomechanical phase transitions in shape memory alloys. *Numerische Mathematik*, 58:759–778, 1991.
- [Spr89] Jürgen Sprekels. Global existence for thermomechanical processes with nonconvex free energies of ginzburg-landau form. *J. Math. Anal. Appl.*, 141:333–348, 1989.
- [SZ89] J. Sprekels and Songmu Zheng. Global solutions to the equations of a ginzburg–landau theory for structural phase transitions in shape memory alloys. *Physica D*, 39:59–76, 1989.
- [SZ93] Weixi Shen and Songmu Zheng. On the coupled cahn–hilliard equations. *Comm. PDE*, Vol 18, No 3–4:701–727, 1993.

- [Tem88] Roger Temam. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Springer, New York, 1988.
- [Zhe95] Songmu Zheng. *Nonlinear parabolic equations and parabolic-hyperbolic coupled systems*. Pitman, 1995.